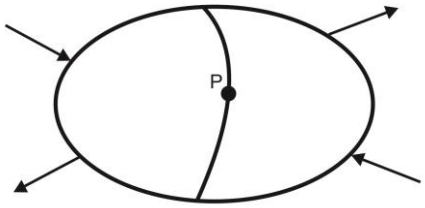
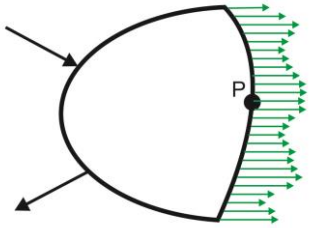
# A rugalmasságtan alapjai

## A feszültségállapot

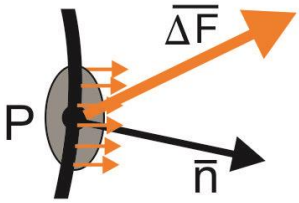



Vizsgáljunk meg egy tetszőleges térbeli testet, amelyet egyensúlyi erőrendszer terhel.

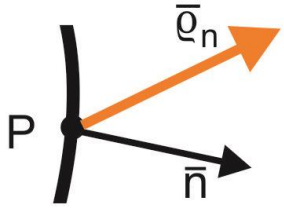
Válasszuk ki a test egy „P” pontját és osszuk szét a testet a kiválasztott ponton keresztülfektetett tetszőleges felülettel két részre.




A szétválasztott testek egyensúlyban maradnak, ha az elmetszési felületre működtetjük a –test belsejében a terhelő erők hatására létrejövő – megoszló erőrendszert.




Határoljunk el a „P” pont környezetében egy $\Delta A$ felületelemet. A felületelem normálisa legyen **n.** A felületelemen megoszló erőrendszer eredője pedig **ΔF.**



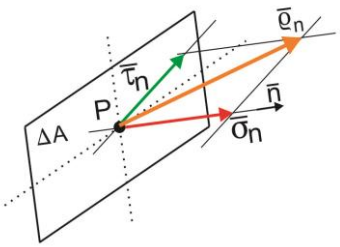

Ha a felületelemet minden határon túl csökkentjük, akkor határátmenetként kapjuk:

$$\boldsymbol{\rho}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{\mathbf{dF}}{dA}$$

ahol $\boldsymbol{\rho}_n$ az **n** normálisú elemi felülethez tartozó fajlagos belső erő (vagy más néven feszültség).

Általában a feszültségvektorok iránya nem egyezik meg a felületelem normálisának irányával.

**A** $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor felbontható két komponensre. Az egyik komponens a felületelem síkjára merőleges $\boldsymbol{\sigma}_n$, míg a másik beleesik a síkba $\boldsymbol{\tau}_n$.

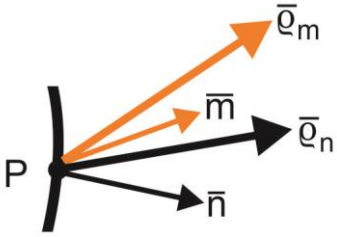



Ha ismerjük az **n** és $\boldsymbol{\rho}_n$ vektorokat, akkor

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n}(\boldsymbol{\rho}_n \mathbf{n})$$

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\rho}_n \times \mathbf{n}) = \boldsymbol{\rho}_n - \boldsymbol{\sigma}_n.$$

Az n normális irányába eső komponenst - $\boldsymbol{\sigma}_n$ - normális feszültségnek, a síkba eső komponenst pedig - $\boldsymbol{\tau}_n$ - csúsztató- vagy nyírófeszültségnek nevezzük.




Ha a „P” ponton keresztül egy másik **m** normálisú síkkal vágjuk ketté a testet, akkor a ponthoz tartozóan egy másik $\boldsymbol{\rho}_m$ feszültségvektort kapunk.

Ha ismerjük a „P” ponthoz tartozó valamennyi $\boldsymbol{\rho}$ feszültségvektort (ismerjük a feszültségvektorok összességét), akkor mondhatjuk, hogy ismerjük a „P”pont feszültségállapotát.

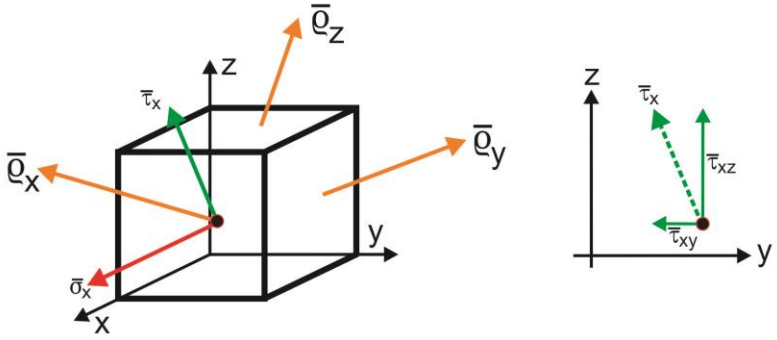
Bizonyítható, hogy ha ismerjük a „P” ponthoz tartozó $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ egységvektorokhoz tartozó $\boldsymbol{\rho}_\xi, \boldsymbol{\rho}_\eta, \boldsymbol{\rho}_\zeta$ feszültségvektorokat, akkor bármely

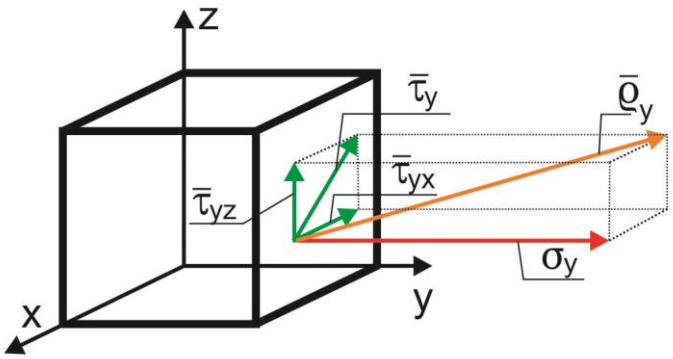
$\mathbf{e} = \lambda_1 * \mathbf{e}_\xi + \lambda_2 * \mathbf{e}_\eta + \lambda_3 * \mathbf{e}_\zeta$ egységvektorhoz tartozó $\boldsymbol{\rho}_e$feszültségvektor felírható a következő alakban:

$$\boldsymbol{\rho}_e = \lambda_1 * \boldsymbol{\rho}_\xi + \lambda_2 * \boldsymbol{\rho}_\eta + \lambda_3 * \boldsymbol{\rho}_\zeta$$

ahol $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$vektorok nem komplanáris (nem egy síkban fekvő) vektorok.

Az általunk szabadon választott egységvektorok legtöbbször az egymásra kölcsönösen merőleges **i**, **j**, **k** egységvektorok.






Amint az ábrákon látható az **i**, **j**, **k** egységvektorokhoz - mint normális egységvektorokhoz - tartozó síkokon fellépő feszültségvektorok a $\boldsymbol{\rho}_x, \boldsymbol{\rho}_y, \boldsymbol{\rho}_z$. Ezen feszültségvektoroknak van síkra merőleges $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ és síkba eső $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \ldots)$komponense.

A csúsztató $\boldsymbol{\tau}$ komponens tovább bontható a síkot kifeszítő tengelyek irányába.

Ha mindhárom feszültségvektornál megtesszük ezt a felbontást, kilenc előjeles skalár értékkel leírhatjuk az eredeti $\boldsymbol{\rho}_x, \boldsymbol{\rho}_y, \boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektorokat.

A $\tau$ feszültségek indexeinek értelmezése az alábbi:

Az első indexelem azt mutatja meg, hogy a $\tau$ feszültség síkjának melyik irány a normálisa.

A második indexelem pedig azt mutatja, hogy a $\tau$ feszültség a síkot kifeszítő tengelyek közül melyik irányával párhuzamos.

A $\tau$ feszültség előjele adja meg, hogy a $\tau$ feszültség vektora a vele párhuzamos tengely pozitív vagy negatív irányába mutat-e.

Bizonyítható, hogy a $\tau$ feszültségek között létezik az alábbi kapcsolat:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a $\boldsymbol{\rho}_x, \boldsymbol{\rho}_y, \boldsymbol{\rho}_z$ vektorok leírásához hat skalár érték is elegendő.

A $\sigma$ feszültségek indexelésekor használhatjuk a kétindexes lehetőséget is, de a gyakorlatban az egyindexes használat terjedt el. A kétindexes jelölésnél az indexek jelentése megegyezik a $\tau$ feszültségnél alkalmazottal.

A fenti vektorokkal illetve skalár komponenseikkel létrehozhatjuk a $\boldsymbol{\Phi}$ feszültségtenzort:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$

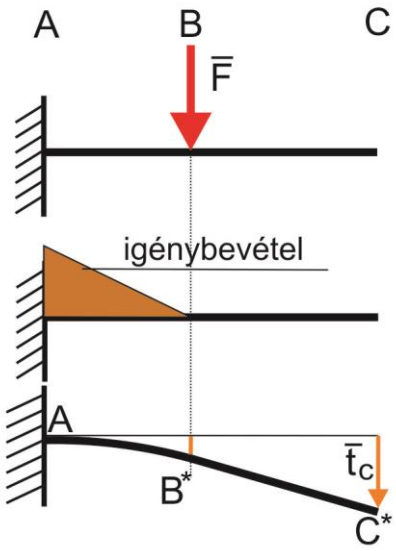
A test kiválasztott pontjának feszültségállapota tehát egyértelműen jellemezhető a ponthoz tartozó feszültségtenzorral. A feszültségtenzor segítségével ugyanis bármely ismert **n** normálisú síkhoz tartozó $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{n}}$ feszültségvektor meghatározható:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{n}$$

illetve

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \rho_{\mathrm{x}} \\ \rho_{\mathrm{y}} \\ \rho_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{x}} & \tau_{\mathrm{xy}} & \tau_{\mathrm{xz}} \\ \tau_{\mathrm{yx}} & \sigma_{\mathrm{y}} & \tau_{\mathrm{yz}} \\ \tau_{\mathrm{zx}} & \tau_{\mathrm{zy}} & \sigma_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathrm{n}_{\mathrm{x}} \\ \mathrm{n}_{\mathrm{y}} \\ \mathrm{n}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}.$$

## Az alakváltozási állapot




A valóságos anyagi testek a rájuk ható erők hatására megváltoztatják alakjukat.

Ha a vázolt befogott tartót **F** erővel megterheljük, akkor a testet alkotó pontok a terhelés hatására elmozdulnak.

$\mathbf{t}_c$ a C" ponthoz tartozó elmozdulás-vektor.

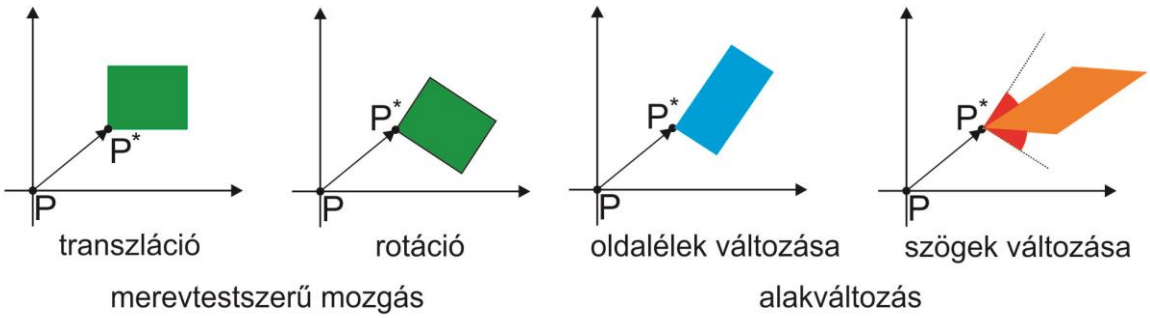
A test alakjának megváltozását akkor tekintjük ismertnek, ha a test minden pontjának elmozdulását ismerjük.

Az egyenes tartó megváltozott alakjának elemzésével megállapíthatjuk, hogy az AB meggörbült míg a BC szakaszon a tartó pontjai elmozdultak ugyan, de a pontjai egymáshoz viszonyított helyzete állandó maradt.

Alakváltozásról akkor beszélünk, ha az egymáshoz kapcsolódó pontok közötti távolság megváltozik. Alakváltozás csak olyan szakaszon jön létre, ahol igénybevétel is található.

Az elmozdulás tágabb fogalom. Az elmozdulás magába foglalja a merevtestszerű mozgást és az alakváltozást is.

Ennek szemléltetésére nézzük meg a következő ábrát. Vizsgáljuk meg egy anyagi pont környezetének megváltozását az xy síkban:



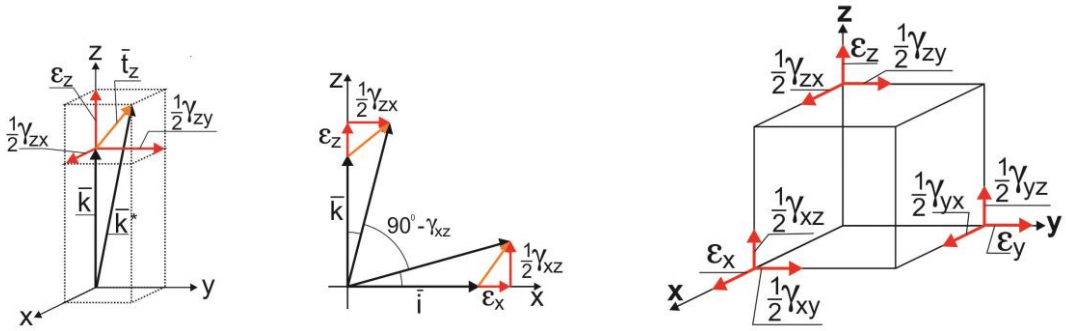

A folyamat első két lépésében nincs alakváltozás, nem változik meg a téglalap sarokpontjainak egymáshoz viszonyított helyzete.

Ha a „P pont környezetében egy elemi kockát jelölünk ki, akkor a fenti mozgások mindhárom koordinátasíkban végbemehetnek.

Egyrészt megváltoznak az oldalhosszak, mely változások arányosak a fajlagos hosszváltozásokkal (ε).

Másrészt az egymásra kölcsönösen merőleges  élek alkotta nagyszögek eltorzulnak. A két-két él eddigi derékszöge valamilyen φ szöggel megváltozik.

Ha az elemi kocka éleit az **i**, **j**, **k** egységvektorokkal definiáljuk, akkor a mozgásokat az alábbi ábrán láthatjuk:




A szerkezeti anyagok többségénél valós üzemi körülmények között a létrejövő alakváltozások olyan kicsinyek, hogy szabad szemmel nem láthatók.

Az alakváltozási tenzorban ezeket az egységvektorokhoz rendelt fajlagos értékeket gyüjtjük össze:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Az alakváltozási tenzor a feszültségtenzorhoz hasonlóan szimmetrikus.

## A feszültségtenzor és alakváltozási tenzor kapcsolata

A feszültségtenzor alakja:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Az alakváltozási tenzor alakja:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

A két tenzor között az alábbi összefüggések állnak fent:

$\mathbf{\Phi} = 2 * \mathrm{G}\left(\mathbf{U} + \frac{1}{\mathrm{m}-2}\mathrm{U_I}\mathbf{E}\right)$ illetve $\mathbf{U} = \frac{1}{2*\mathrm{G}}\left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{\mathrm{m}+1}\Phi_\mathrm{I}\mathbf{E}\right)$

ahol

G csúsztató rugalmassági modulus

m Poisson szám

$\mathrm{U_I}$ az alakváltozási tenzor első skalár invariánsa $\mathrm{U_I} = \varepsilon_\mathrm{x} + \varepsilon_\mathrm{y} + \varepsilon_\mathrm{z}$

$\Phi_\mathrm{I}$ a feszültségtenzor első skalár invariánsa $\Phi_\mathrm{I} = \sigma_\mathrm{x} + \sigma_\mathrm{y} + \sigma_\mathrm{z}$

**E** egységtenzor ( a főátlóbeli elemek 1 értékűek a többi elem 0 )

Sokszor kell használni még az alábbi összefüggést is:

$$E = 2 * G(1 + \nu)$$

ahol

E rugalmassági modulus

G csúsztató rugalmassági modulus

ν Poisson tényező $\left(m = \frac{1}{\nu}\right)$

## A sajátérték és sajátvektor számítása valamint ezek értelmezése

A háromdimenziós térben értelmezett $\boldsymbol{\Phi}$ feszültségtenzor és **U** alakváltozási tenzor szimmetrikus és általános esetben tömör.

Található azonban három, egymásra kölcsönösen merőleges egységvektor $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ amelyek koordinátarendszerében a fenti tenzorok úgynevezett diagonál tenzorokká alakulnak át.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{x,y,z}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi}_{e_1,e_2,e_3} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

illetve

$$\mathbf{U}_{\mathrm{x,y,z}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}_{\mathrm{e_1,e_2,e_3}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

A $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ illetve az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ értékeket a tenzor sajátértékének nevezzük, melyeket egy matematikai eljárással tudunk számítani.

A feszültségtenzor sajátértékét az alábbi vektoregyenlet triviálistól különböző megoldásai adják

$$(\boldsymbol{\Phi} - \sigma\mathbf{E})\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{0}}$$

ahol **E** az egységtenzor.

Ez akkor létezik, ha

$$\det(\boldsymbol{\Phi} - \sigma\mathbf{E}) = 0 \text{ illetve } \det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0.$$

A determináns kifejtésével jutunk el a karakterisztikus egyenlethez:

$$\sigma^3 - \Phi_{\mathrm{I}} * \sigma^2 - \Phi_{\mathrm{II}} * \sigma - \Phi_{\mathrm{III}} = 0$$

ahol

$\Phi_{\mathrm{I}}$ a tenzor első skalár invariánsa

a főátlóbeli elemek összege $\Phi_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$\Phi_{\mathrm{II}}$ a tenzor második skalár invariánsa

a főátlóbeli elemekhez tartozó aldeterminánsok összege

$$\Phi_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

$\Phi_{III}$ a tenzor harmadik skalár invariánsa

a tenzor determinánsa

$$\Phi_{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

A karakterisztikus egyenletnek három valós gyöke van, melyeket csökkenő nagyságuk szerint sorszámozzuk. Ezeket a gyököket nevezzük a tenzor sajátértékeinek.

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Ezek a matematikai értelemben vett sajátértékek adják a feszültségállapot főfeszültségeit.

Minden egyes sajátértékhez tartozik sajátvektor, melyek meghatározásához az alábbi egyenletrendszert használjuk:

$$\mathbf{(\Phi\text{-}}\sigma_i\mathbf{E)}\bar{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{i}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \textbf{és} \quad e_{ix}{}^2 + e_{iy}{}^2 + e_{iz}{}^2 = 1.$$

Az így kiszámított $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektorok a tenzor sajátvektorai, melynek megadják a főfeszültségi irányokat, vagy más néven a feszültségi főtengelyeket.

Az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektor egymásra kölcsönösen merőleges.

Hasonló matematikai eljárással számíthatók az alakváltozási tenzor főnyúlásai és a főnyúlási irányok.

Példa a sajátvektor feladat meghatározására

Legyen

$$\mathbf{\Phi}_{\mathrm{x,y,z}} = \begin{bmatrix} 48 & 0 & 32 \\ 0 & -56 & 0 \\ 32 & 0 & 96 \end{bmatrix}.$$

A sajátértékek az alábbi determináns számításával kapjuk:

$$\det \begin{bmatrix} (48-\sigma) & 0 & 32 \\ 0 & (-56-\sigma) & 0 \\ 32 & 0 & (96-\sigma) \end{bmatrix} = 0$$

A determináns kifejtését célszerű a középső sor szerint elvégezni:

$$(-56-\sigma) * [(48-\sigma) * (96-\sigma) - 32^2] = 0$$

Ezzel a fogással a harmadfokú egyenletet felbontottuk egy elsőfokú és egy másodfokú egyenlet megoldására.

$-56-\sigma = 0 \qquad \sigma = -56$

$[(48-\sigma) * (96-\sigma) - 32^2] = 0 \quad \sigma = 112 \qquad \sigma = 32$

Megállapodás szerint sorba rakjuk a sajátértékeket, melyek fizikai jelentése első, második és harmadik főfeszültség:

$$\sigma_1 = 112 \quad > \quad \sigma_2 = 32 \quad > \quad \sigma_3 = -56$$

Minden egyes főfeszültséghez tartozik egy főirány:

$$\sigma_1 \rightarrow \mathbf{e}_1 = [\mathrm{e_{1x}} \quad \mathrm{e_{1y}} \quad \mathrm{e_{1z}}]$$

$$\sigma_2 \rightarrow \mathbf{e}_2 = [\mathrm{e_{2x}} \quad \mathrm{e_{2y}} \quad \mathrm{e_{2z}}]$$

$$\sigma_3 \rightarrow \mathbf{e}_3 = [\mathrm{e_{3x}} \quad \mathrm{e_{3y}} \quad \mathrm{e_{3z}}]$$

Az első sajátvektor számítása:

$$\begin{bmatrix} (48-112) & 0 & 32 \\ 0 & (-56-112) & 0 \\ 32 & 0 & (96-112) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{1x}} \\ \mathrm{e_{1y}} \\ \mathrm{e_{1z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{1x}{}^2 + e_{1y}{}^2 + e_{1z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$$-64 * e_{1x} + \quad 0 * e_{1y} \quad + 32 * e_{1z} = 0$$

$$0 * e_{1x} - 168 * e_{1y} \quad + \quad 0 * e_{1z} = 0$$

$$32 * e_{1x} + \quad 0 * e_{1y} \quad - 16 * e_{1z} = 0$$

Az első és harmadik egyenlet nem független egymástól.

A második egyenletből

$$0 * e_{1x} - 168 * e_{1y} \quad + \quad 0 * e_{1z} = 0 \quad e_{1y} = 0$$

Az első egyenletből

$$-64 * e_{1x} + \quad 0 * e_{1y} \quad + 32 * e_{1z} = 0 \quad e_{1x} = 0{,}5 * e_{1z}$$

Az így kapott $e_{1y} = 0$ és $e_{1x} = 0{,}5 * e_{1z}$ értékeket behelyettesítjük a kiegészítő egyenletbe:

$$(0{,}5 * e_{1z})^2 + (0)^2 + (e_{1z})^2 = 1$$

amelyből: $e_{1z} = \pm 0{,}8944$ illetve $e_{1x} = \pm 0{,}4472$

Ezzel megkaptuk az első sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$\mathbf{e}_1 = [0{,}4472 \quad 0 \quad 0{,}8944]$ vagy $\boldsymbol{e_1}^* = [-0{,}4472 \quad 0 \quad -0{,}8944]$

A második sajátvektor számítása:

$$\begin{bmatrix} (48-32) & 0 & 32 \\ 0 & (-56-32) & 0 \\ 32 & 0 & (96-32) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{2x}{}^2 + e_{2y}{}^2 + e_{2z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$$16 * e_{2x} + \quad 0 * e_{2y} \quad + 32 * e_{2z} = 0$$

$$0 * e_{2x} - 88 * e_{2y} \quad + \quad 0 * e_{2z} = 0$$

$$32 * e_{2x} + \quad 0 * e_{2y} \quad + 64 * e_{2z} = 0$$

A második egyenletből

$0 * \mathrm{e}_{2\mathrm{x}} - 88 * \mathrm{e}_{2\mathrm{y}} \quad + \quad 0 * \mathrm{e}_{2\mathrm{z}} = 0 \quad \mathrm{e}_{2\mathrm{y}} = 0$

Az első egyenletből

$16 * \mathrm{e}_{2\mathrm{x}} + \quad 0 * \mathrm{e}_{2\mathrm{y}} + 32 * \mathrm{e}_{2\mathrm{z}} = 0 \quad \mathrm{e}_{2\mathrm{x}} = -2 * \mathrm{e}_{2\mathrm{z}}$

Az így kapott $\mathrm{e}_{2\mathrm{y}} = 0$ és $\mathrm{e}_{2\mathrm{x}} = -2 * \mathrm{e}_{2\mathrm{z}}$ értékeket behelyettesítjük a kiegészítő egyenletbe:

$(-2 * e_{2z})^2 + (0)^2 + (e_{2z})^2 = 1$

amelyből: $e_{2z} = \pm 0{,}4472$ illetve $e_{2x} = \pm 0{,}8944$

Ezzel megkaptuk a második sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$\mathbf{e}_2 = [-0{,}8944 \quad 0 \quad 0{,}4472]$ vagy $\boldsymbol{e_2}^* = [0{,}8944 \quad 0 \quad -0{,}4472]$

A harmadik sajátvektor számítása:

$$\begin{bmatrix} (48+56) & 0 & 32 \\ 0 & (-56+56) & 0 \\ 32 & 0 & (96+56) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}_{3\mathrm{x}} \\ \mathrm{e}_{3\mathrm{y}} \\ \mathrm{e}_{3\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{3x}{}^2 + e_{3y}{}^2 + e_{3z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$104 * \mathrm{e}_{3\mathrm{x}} + 0 * \mathrm{e}_{3\mathrm{y}} + 32 * \mathrm{e}_{3\mathrm{z}} = 0$

$0 * \mathrm{e}_{3\mathrm{x}} + 0 * \mathrm{e}_{3\mathrm{y}} + \quad 0 * \mathrm{e}_{3\mathrm{z}} = 0$

$32 * \mathrm{e}_{3\mathrm{x}} + 0 * \mathrm{e}_{3\mathrm{y}} + 152 * \mathrm{e}_{3\mathrm{z}} = 0$

Az első egyenletből

$104 * \mathrm{e}_{3\mathrm{x}} + 0 * \mathrm{e}_{3\mathrm{y}} + 32 * \mathrm{e}_{3\mathrm{z}} = 0 \quad \mathrm{e}_{3\mathrm{x}} = -0{,}3077 * \mathrm{e}_{3\mathrm{z}}$

Ezt behelyettesítve a harmadik egyenletbe

$32 * (-0{,}3077 * \mathrm{e}_{3\mathrm{z}}) + 152 * \mathrm{e}_{3\mathrm{z}} = 0 \quad \mathrm{e}_{3\mathrm{z}} = 0$

Ezzel

$$\mathrm{e}_{3\mathrm{x}} = 0$$

Az így kapott $\mathrm{e}_{3\mathrm{x}} = 0$ és $\mathrm{e}_{3\mathrm{z}} = 0$ értékeket behelyettesítjük a kiegészítő egyenletbe:

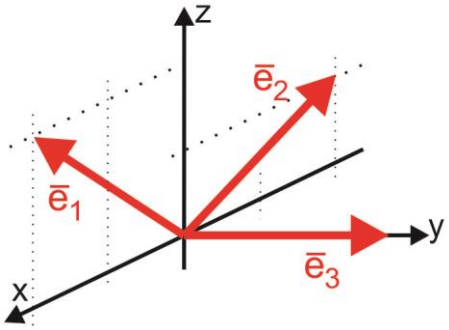
$(0)^2 + \left(e_{3y}\right)^2 + (0)^2 = 1$

amelyből: $e_{3y} = \pm 1$

Ezzel megkaptuk a harmadik sajátértékhez tartozó sajátvektort:

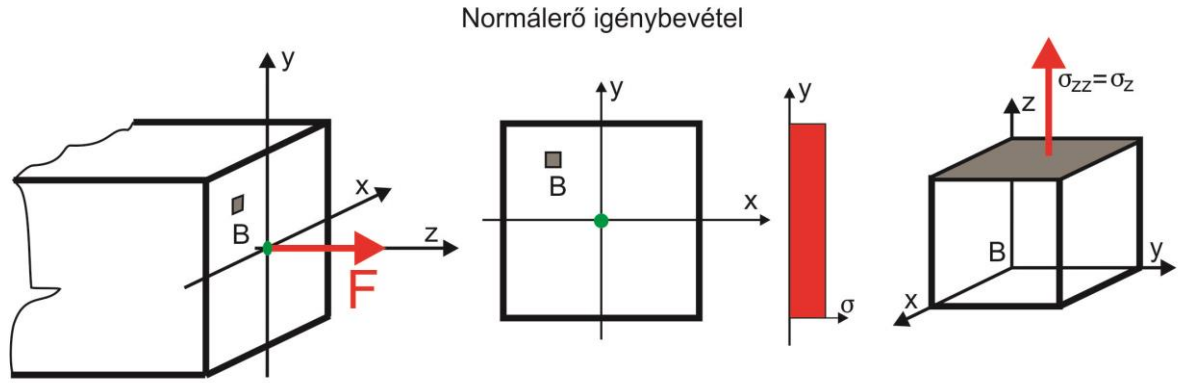
$\mathbf{e}_3 = [0 \quad 1 \quad 0]$ vagy $\boldsymbol{e_3}^* = [0 \quad -1 \quad 0]$

A három vektor kölcsönösen merőleges egymásra, hiszen az $\mathbf{e}_1$és $\mathbf{e}_2$ vektorok skaláris szorzata zérus. Az $\mathbf{e}_3$ vektor pedig merőleges az xz síkra.



## Az igénybevételekhez tartozó feszültségek ábrázolása és a feszültségtenzor kitöltése

Normálerő igénybevétel




Az ábrán a zöld pont a keresztmetszet súlypontját jelöli.

A B pontban a normálerő igénybevételből származó feszültség

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

ahol: F a felületet terhelő erő

A a keresztmetszet területe

A keresztmetszetben ébredő $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségvektorok eredője a keresztmetszetet terhelő **F** erő.

A $\sigma$ feszültségeknél alkalmazható az egy indexes és a két indexes megoldás is.

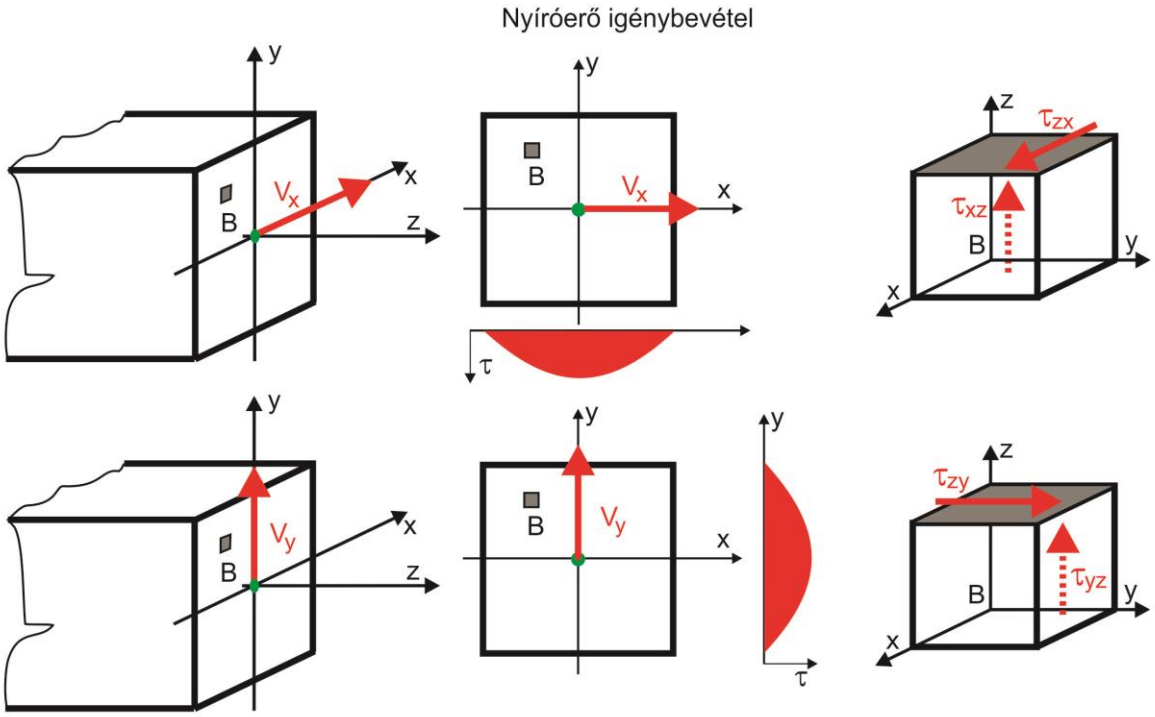
Két index alkalmazásakor az első index a felület normálisát kijelölő tengelyre utal, míg a második index a feszültség irányát mutatja eltekintve a feszültségvektor előjelétől.

Az ébredő feszültség pozitív, ha húzóerő illetve negatív, ha nyomóerő terheli a keresztmetszetet.

A B ponthoz tartozó feszültségtenzor az x,y,z koordinátarendszerben az alábbi

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

## Nyíróerő igénybevétel




Az ábrán a zöld pont a keresztmetszet súlypontját jelöli.

A B pontban az $\mathbf{V_y}$ nyíróerő igénybevételből származó feszültség

$$\tau_y = \frac{V_y}{I_x} * \frac{S_x}{x}$$

ahol: $V_y$ a keresztmetszetet terhelő y irányú erő

$I_x$ a teljes keresztmetszet másodrendű nyomatéka az x tengelyre

$S_x$ a keresztmetszetből az elhagyott terület elsőrendű (vagy statikai) nyomatéka az x tengelyre

x a keresztmetszet vizsgált magasságában a valósan létező anyag x irányú mérete

A keresztmetszetben ébredő $\boldsymbol{\tau}$ feszültségvektorok eredője a keresztmetszetet terhelő $\boldsymbol{V_y}$ erő.

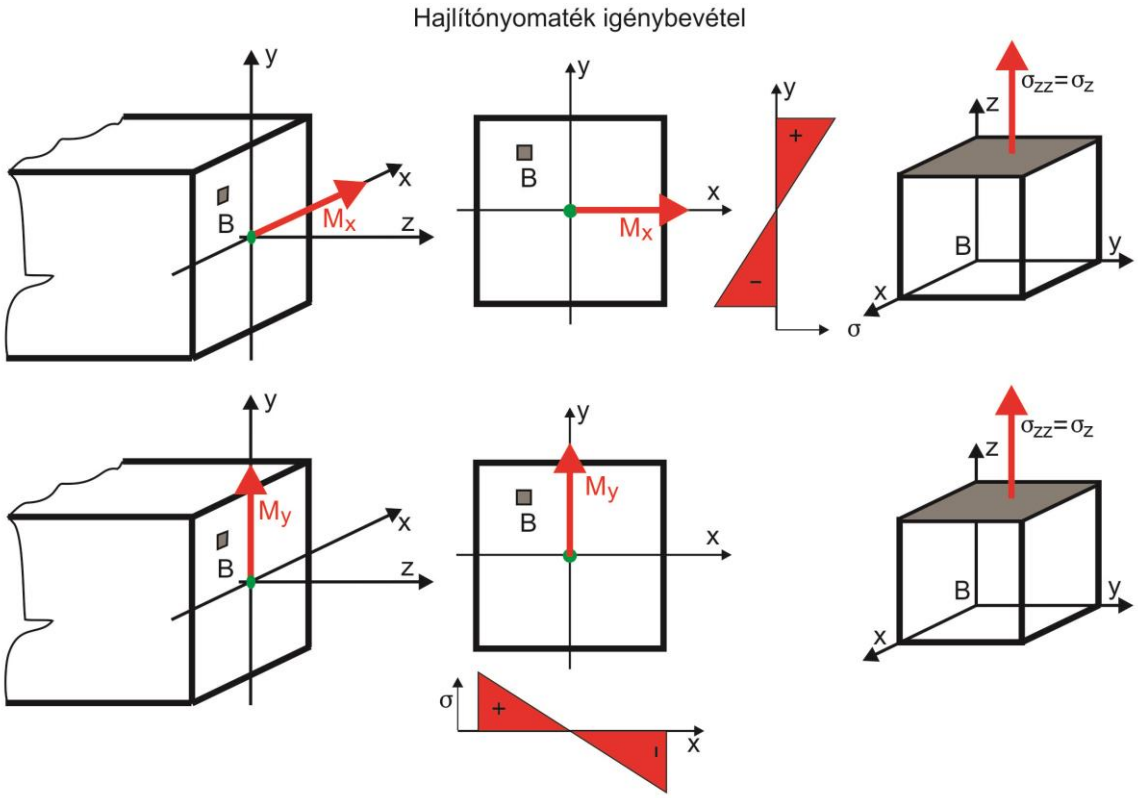
A $\tau$ feszültségeknél csak a két indexes megoldás alkalmazható.

A B ponthoz tartozó feszültségtenzor az x,y,z koordinátarendszerben az alábbi, ha mindkét nyíróerő terheli a keresztmetszetet

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

A szaggatott vonallal rajzolt $\tau$ feszültségvektorok a $\tau$ feszültségek dualitásából adódik.

## Hajlítónyomaték igénybevétel




Az ábrán a zöld pont a keresztmetszet súlypontját jelöli.

A B pontban az $M_x$ hajlítónyomaték igénybevételből származó feszültség

$$\sigma_y = \frac{M_x}{I_x} * y$$

ahol: $M_x$ a keresztmetszetet terhelő x irányú nyomatékvektor abszolút értéke

$I_x$ a keresztmetszet másodrendű nyomatéka az x tengelyre

y a vizsgált pont távolsága az x tengelytől

A keresztmetszetben ébredő $\boldsymbol{\sigma_y}$ feszültségvektorok eredője zérus, az x tengelyre számított nyomatéka pedig $M_x$.

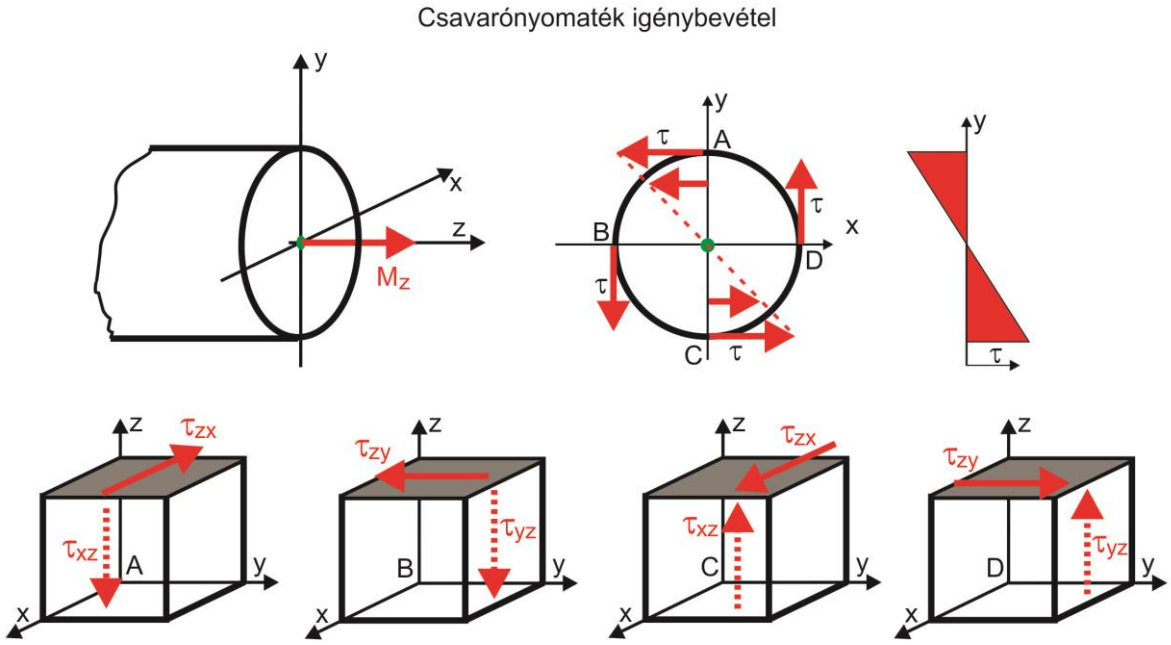
A $\sigma$ feszültségeknél alkalmazható az egy indexes és a két indexes megoldás is.

A B ponthoz tartozó feszültségtenzor az x,y,z koordinátarendszerben az alábbi

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

A B pontban ébredő feszültség a két igénybevételből ébredő feszültségek eredője.

## Csavarónyomaték igénybevétel




Az ábrán a zöld pont a keresztmetszet súlypontját jelöli.

Kör vagy körgyűrű keresztmetszetek esetén a csavarónyomatékól ébredő $\tau$ feszültségek minden pontban érintő irányúak és maximális értéküket a felületen ( a maximális sugárirányú távolságnál ) érik el.

A csavarónyomaték igénybevételből származó feszültség nagyságát az alábbiak szerint számíthatjuk

$$\tau_r = \frac{M_z}{I_p} * r$$

ahol: $M_z$ a keresztmetszetet terhelő csavarónyomaték

$I_p$ a teljes keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka

r a keresztmetszet vizsgált pontjában a sugár értéke

A keresztmetszetben ébredő $\boldsymbol{\tau}$ feszültségvektorok eredője a keresztmetszetet terhelő $\mathbf{M_z}$ nyomaték.

A $\tau$ feszültségeknél csak a két indexes megoldás alkalmazható.

A szaggatott vonallal rajzolt $\tau$ feszültségvektorok a $\tau$ feszültségek dualitásából adódik.

Mivel a feszültségek érintőirányúak a feszültségtenzorok pontról pontra változnak. A következőkben megadjuk az ábrán jelölt pontokhoz tartozó feszültségtenzorokat.

$$\boldsymbol{\Phi_A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi_B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_{yz} \\ 0 & -\tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

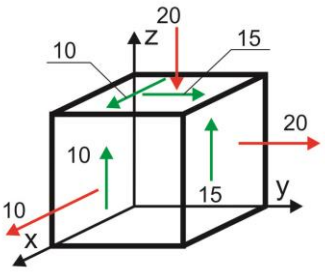
$$\boldsymbol{\Phi_C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Phi_D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

## Feladatok

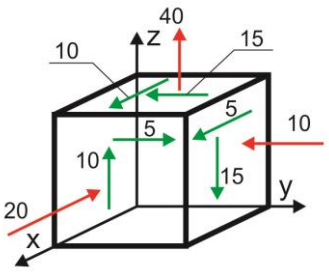
1. feladat

Rajzoljuk meg az adott tenzorhoz tartozó feszültségi kiskockát!

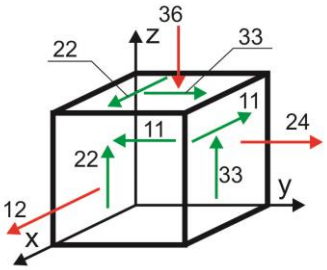
$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 0 & 20 & 15 \\ 10 & 15 & -20 \end{bmatrix}$$



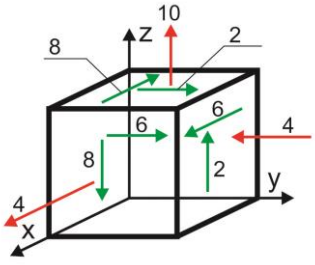

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} -20 & 5 & 10 \\ 5 & -10 & -15 \\ 10 & -15 & 40 \end{bmatrix}$$



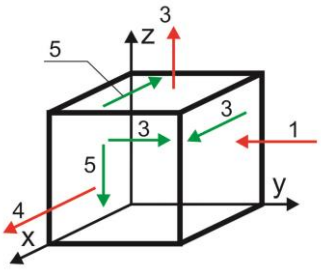

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 12 & -11 & 22 \\ -11 & 24 & 33 \\ 22 & 33 & -36 \end{bmatrix}$$




$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 6 & -4 & 2 \\ -8 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

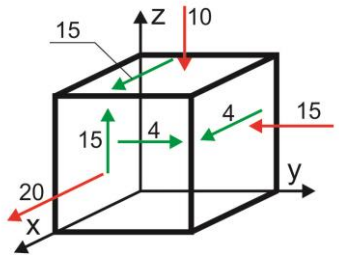



$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

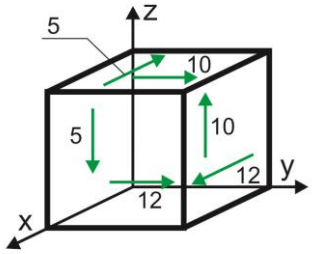


2. feladat

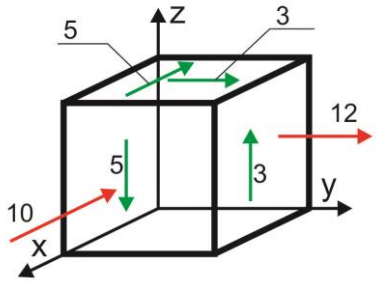
Írjuk fel az adott feszültségi kiskockához tartozó tenzort!



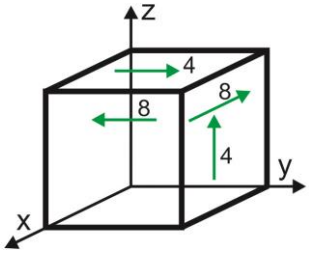

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & 15 \\ 4 & -15 & 0 \\ 15 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$



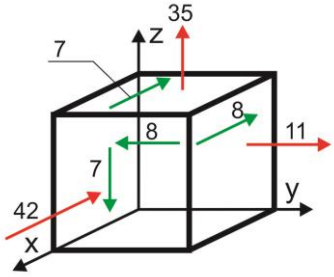

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -5 \\ 12 & 0 & 10 \\ -5 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$




$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -5 \\ 0 & 12 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$




$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$




$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -42 & -8 & -7 \\ -8 & 11 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

3. feladat

A test adott „P” pontjában ismerjük a feszültségtenzort. Rugalmas alakváltozást feltételezve határozzuk meg az alakváltozási tenzort ugyanabban a koordinátarendszerben!

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 6 & -4 & 2 \\ -8 & 2 & 10 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{m} = 4 \quad \mathrm{E} = 10^5\ \mathrm{MPa}$$

Az alakváltozási tenzor elemeit az alábbi összefüggéssel számolhatjuk:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2 * \mathrm{G}}\left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{\mathrm{m}+1}\Phi_{\mathrm{I}}\mathbf{E}\right)$$

Első lépésként határozzuk meg a 2*G értékét:

Az $\mathrm{E} = 2\mathrm{G} * (1 + \nu) = 2\mathrm{G} * \left(1 + \frac{1}{\mathrm{m}}\right)$ összefüggésből $\frac{1}{2G} = 0{,}125 * 10^{-4}\ {mm^2}/{N}$.

A feszültségtenzor első skalár invariánsa: $\Phi_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 4 - 4 + 10 = 10$

$$\frac{\Phi_I}{m+1} = \frac{10}{5} = 2$$

Az alakváltozási tenzor elemei:

$U_{(1,1)} = \varepsilon_x = 0{,}125 * 10^{-4} * (4 - 2) = 0{,}25 * 10^{-4}$

$U_{(2,2)} = \varepsilon_y = 0{,}125 * 10^{-4} * (-4 - 2) = -0{,}75 * 10^{-4}$

$U_{(3,3)} = \varepsilon_z = 0{,}125 * 10^{-4} * (10 - 2) = 1 * 10^{-4}$

$U_{(1,2)} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx} = U_{(2,1)} = 0{,}125 * 10^{-4} * (6) = 0{,}75 * 10^{-4}$

$U_{(1,3)} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = U_{(3,1)} = 0{,}125 * 10^{-4} * (-8) = -1 * 10^{-4}$

$U_{(2,3)} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy} = U_{(3,2)} = 0{,}125 * 10^{-4} * (2) = 0{,}25 * 10^{-4}$

Az alakváltozási tenzor tehát:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 & -1 \\ 0{,}75 & -0{,}75 & 0{,}25 \\ -1 & 0{,}25 & 1 \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

4. feladat

A test adott „P” pontjában ismerjük az alakváltozási tenzort. Rugalmas alakváltozást feltételezve határozzuk meg az feszültségtenzort ugyanabban a koordinátarendszerben!

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} * 10^{-4} \qquad \mathrm{E} = 2 * 10^5 \text{ MPa} \quad \mathrm{G} = 0{,}8 * 10^5 \text{ MPa}$$

A feszültségtenzor elemeit az alábbi összefüggés alapján számíthatjuk

$$\mathbf{\Phi} = 2 * \mathrm{G}\left(\mathbf{U} + \frac{1}{\mathrm{m}-2}\mathrm{U_I}\mathbf{E}\right)$$

Az $\mathrm{E} = 2\mathrm{G} * (1+\nu) = 2\mathrm{G} * \left(1 + \frac{1}{\mathrm{m}}\right)$ összefüggésből $m = 4$.

A tenzor első skalár invariánsa $\mathrm{U}_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (-4 - 1 + 3) * 10^{-4} = 6 * 10^{-4}$

$$\frac{\mathrm{U}_I}{m-2} = \frac{6 * 10^{-4}}{2} = 3 * 10^{-4}$$

Az feszültségtenzor elemei:

$\Phi_{(1,1)} = \sigma_x = 1{,}6 * 10^5 * (4+3) * 10^{-4} = 112$ MPa

$\Phi_{(2,2)} = \sigma_y = 1{,}6 * 10^5 * (-1+3) * 10^{-4} = 32$ MPa

$\Phi_{(3,3)} = \sigma_z = 1{,}6 * 10^5 * (3+3) * 10^{-4} = 96$ MPa

$\Phi_{(1,2)} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \Phi_{(2,1)} = 1{,}6 * 10^5 * (3) * 10^{-4} = 48$ MPa

$\Phi_{(1,3)} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \Phi_{(3,1)} = 1{,}6 * 10^5 * (-5) * 10^{-4} = -80$ MPa

$\Phi_{(2,3)} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \Phi_{(3,2)} = 1{,}6 * 10^5 * (0) * 10^{-4} = 0$ MPa

Az feszültségtenzortenzor tehát:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 112 & 48 & -80 \\ 48 & 32 & 0 \\ -80 & 0 & 96 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

5. feladat

A test adott „P” pontjában ismerjük az alakváltozási tenzor és a feszültségtenzor néhány elemét. Határozzuk meg a hiányzó elemeket!

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 1{,}2 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 1{,}2 & -1{,}4 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} * 10^{-4} \qquad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 4 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & -4{,}8 \\ 4 & -4{,}8 & 4 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\mathrm{E} = 2 * 10^5 \text{ MPa} \qquad \nu = 0{,}25$$

A megoldás során felhasznált összefüggések:

$$\mathbf{\Phi} = 2 * \mathrm{G}\left(\mathbf{U} + \frac{1}{\mathrm{m}-2}\mathrm{U_I}\mathbf{E}\right) \qquad \mathbf{U} = \frac{1}{2*\mathrm{G}}\left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{\mathrm{m}+1}\Phi_\mathrm{I}\mathbf{E}\right)$$

$$m = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0{,}25} = 4 \qquad 2\mathrm{G} = \frac{E}{1+\nu} = 16 * 10^4 \text{ MPa}$$

Az $\varepsilon_z$ számítása az alábbi egyenletből lehetséges:

$$4 = 16 * 10^4 * \left(\varepsilon_z + \frac{2{,}2-1{,}4+\varepsilon_z}{2}\right) * 10^{-4} \qquad \varepsilon_z = -0{,}1$$

Ezek után meghatározhatjuk az alakváltozási tenzor első skalár invariánsát:

$$\mathrm{U}_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (2{,}2 - 1{,}4 - 0{,}1) * 10^{-4} = 0{,}7 * 10^{-4}$$

A feszültségtenzor további elemei:

$$\Phi_{(1,1)} = \sigma_x = 1{,}6 * 10^5 * \left(2{,}2 + \frac{1}{2} * 0{,}7\right) * 10^{-4} = 4{,}08 \text{ MPa}$$

$$\Phi_{(2,2)} = \sigma_y = 1{,}6 * 10^5 * \left(-1{,}4 + \frac{1}{2} * 0{,}7\right) * 10^{-4} = -16{,}8 \text{ MPa}$$

$$\Phi_{(1,2)} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \Phi_{(2,1)} = 1{,}6 * 10^5 * (1{,}2) * 10^{-4} = 19{,}2 \text{ MPa}$$

Az alakváltozási tenzor további elemei:

$$U_{(1,3)} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = U_{(3,1)} = \frac{1}{16} * 10^{-4} * (4) = 0{,}25 * 10^{-4}$$

$$U_{(2,3)} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy} = U_{(3,2)} = \frac{1}{16} * 10^{-4} * (-4{,}8) = -0{,}3 * 10^{-4}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 40{,}8 & 19{,}2 & 4 \\ 19{,}2 & -16{,}8 & -4{,}8 \\ 4 & -4{,}8 & 4 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 1{,}2 & 0{,}25 \\ 1{,}2 & -1{,}4 & -0{,}3 \\ 0{,}25 & -0{,}3 & -0{,}1 \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

6. feladat

Határozzuk meg a tenzorával megadott feszültségállapot főfeszültségeinek nagyságát valamint a középső főnyúlást!

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \text{E} = 2 * 10^5 \text{ MPa} \qquad m = 10/3$$

A főfeszültségek számítása az alábbiak szerint történik:

$$det \begin{bmatrix} (20-\sigma) & 10 & 10 \\ 10 & (20-\sigma) & 0 \\ 10 & 0 & (20-\sigma) \end{bmatrix} = 0$$

$$(20-\sigma) * [(20-\sigma) * (20-\sigma) - 10^2] + 10 * [0 - 10 * (20-\sigma)] = 0$$

A karakterisztikus egyenlete megoldásai:

$$\sigma_1 = \left(20 + 10 * \sqrt{2}\right)\text{MPa} \quad \sigma_2 = 20 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = \left(20 - 10 * \sqrt{2}\right) \text{MPa}.$$

A középső főnyúlás számítása:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2 * \text{G}}\left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{\text{m}+1}\Phi_{\text{I}}\mathbf{E}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 * G} * \left( \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - \frac{1}{m+1} * (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 * G} * \left( \sigma_2 - \frac{1}{m+1} * (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) * 1 \right)$$

$$2\text{G} = \frac{E}{1+\nu} = 153846 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_2 = 4 * 10^{-5}$$

7. feladat

Adott egy „P” ponthoz tartozó feszültségtenzor az x,y,z koordinátarendszerben. Határozzuk meg a főfeszültségeket és a főirányokat!

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 400 & 0 \\ 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

A főfeszültségek számítása az alábbiak szerint történik:

$$det\begin{bmatrix} (0-\sigma) & 400 & 0 \\ 400 & (0-\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & (0-\sigma) \end{bmatrix} = (0-\sigma) * [(0-\sigma) * (0-\sigma) - 400^2] = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása:

$\sigma_1 = 400\ \text{MPa} \quad \sigma_2 = 0\ \text{MPa} \quad \sigma_3 = -400\ \text{MPa}.$

Az első sajátvektor $\mathbf{e}_1 = [e_{1x} \quad e_{1y} \quad e_{1z}]$ számítása:

$$\begin{bmatrix} (0-400) & 400 & 0 \\ 400 & (0-400) & 0 \\ 0 & 0 & (0-400) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{1x}} \\ \mathrm{e_{1y}} \\ \mathrm{e_{1z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{1x}{}^2 + e_{1y}{}^2 + e_{1z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$$-400 * \mathrm{e_{1x}} + 400 * \mathrm{e_{1y}} + 0 * \mathrm{e_{1z}} = 0$$

$$400 * \mathrm{e_{1x}} - 400 * \mathrm{e_{1y}} + 0 * \mathrm{e_{1z}} = 0$$

$$0 * \mathrm{e_{1x}} + 0 * \mathrm{e_{1y}} - 400 * \mathrm{e_{1z}} = 0$$

harmadik egyenletből

$$-400 * \mathrm{e_{1z}} = 0 \quad \mathrm{e_{1z}} = 0$$

Az első két egyenlet nem független egymástól. Az első egyenletből

$$\mathrm{e_{1x}} = \mathrm{e_{1y}}$$

Ezeket behelyettesítve a kiegészítő egyenletbe:

$$e_{1x}{}^2 + e_{1y}{}^2 = 1 \qquad e_{1x} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e_{1y} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ezzel megkaptuk az első sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$$\mathbf{e}_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right] \text{ vagy } \boldsymbol{e_1}^* = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right]$$

Az második sajátvektor $\mathbf{e}_2 = [e_{2x} \quad e_{2y} \quad e_{2z}]$ számítása:

$$\begin{bmatrix} (0-0) & 400 & 0 \\ 400 & (0-0) & 0 \\ 0 & 0 & (0-0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{2x}} \\ \mathrm{e_{2y}} \\ \mathrm{e_{2z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{2x}{}^2 + e_{2y}{}^2 + e_{2z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$400 * \mathrm{e_{2y}} = 0 \qquad \mathrm{e_{2y}} = 0$

$400 * \mathrm{e_{2x}} = 0 \qquad \mathrm{e_{2x}} = 0$

Ezeket behelyettesítve a kiegészítő egyenletbe:

$e_{1z}{}^2 = 1 \qquad e_{1z} = \pm 1$

Ezzel megkaptuk a második sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$$\mathbf{e}_2 = [0 \quad 0 \quad 1] \text{ vagy } \boldsymbol{e_2}^* = [0 \quad 0 \quad -1]$$

A harmadik sajátvektor $\mathbf{e}_3 = [e_{3x} \quad e_{3y} \quad e_{3z}]$ számítása:

$$\begin{bmatrix} (0+400) & 400 & 0 \\ 400 & (0+400) & 0 \\ 0 & 0 & (0+400) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{3x}} \\ \mathrm{e_{3y}} \\ \mathrm{e_{3z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{2x}{}^2 + e_{2y}{}^2 + e_{2z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$400 * \mathrm{e_{3x}} + 400 * \mathrm{e_{3y}} + 0 * \mathrm{e_{3z}} = 0$

$400 * \mathrm{e_{3x}} + 400 * \mathrm{e_{3y}} + 0 * \mathrm{e_{3z}} = 0$

$0 * \mathrm{e_{3x}} + 0 * \mathrm{e_{3y}} + 400 * \mathrm{e_{3z}} = 0$

harmadik egyenletből

$400 * e_{3z} = 0 \quad e_{3z} = 0$

Az első két egyenlet nem független egymástól. Az első egyenletből

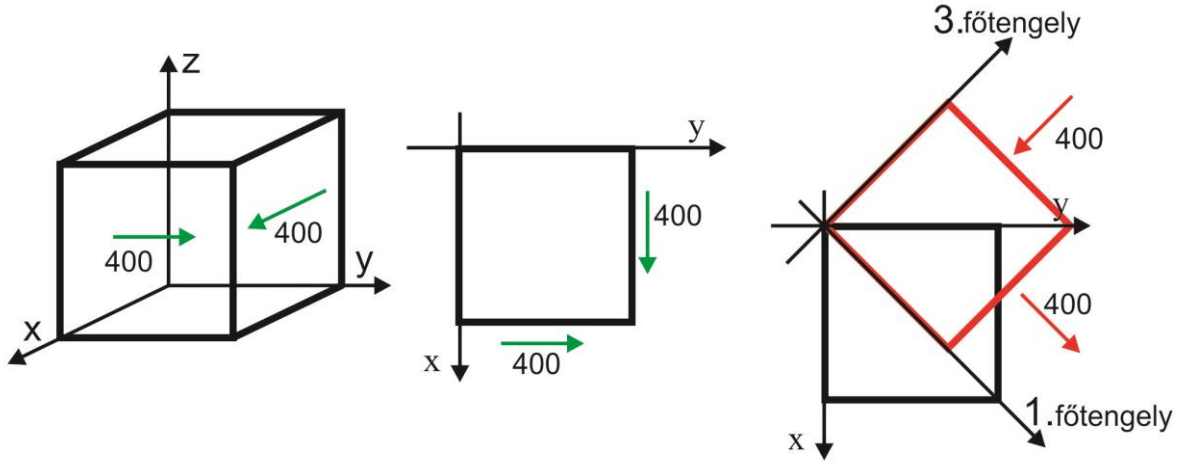
$$e_{3x} = -e_{3y}$$

Ezeket behelyettesítve a kiegészítő egyenletbe:

$e_{3y}{}^2 + e_{3y}{}^2 = 1 \quad e_{3y} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e_{3x} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ezzel megkaptuk a harmadik sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$\mathbf{e}_3 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right]$ vagy $\boldsymbol{e_3}^* = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right]$




A második főtengely nem változik marad a z tengely, amelynek irányában a főfeszültség zérus értékű $\sigma_2 = 0$ MPa.

8. feladat

Adott egy „P” ponthoz tartozó feszültségtenzor az x,y,z koordinátarendszerben. Határozzuk meg a főfeszültségeket és a főirányokat!

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

A főfeszültségek számítása az alábbiak szerint történik:

$$det\begin{bmatrix} (-4-\sigma) & 0 & 4 \\ 0 & (-3-\sigma) & 0 \\ 4 & 0 & (2-\sigma) \end{bmatrix} = (-3-\sigma) * [(-4-\sigma) * (2-\sigma) - 4^2] = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása:

$\sigma_1 = 4$ MPa $\quad \sigma_2 = -3$ MPa $\quad \sigma_3 = -6$ MPa.

Az első sajátvektor $\mathbf{e}_1 = [e_{1x} \quad e_{1y} \quad e_{1z}]$ számítása:

$$\begin{bmatrix} (-4-4) & 0 & 4 \\ 0 & (-3-4) & 0 \\ 4 & 0 & (2-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{1x}} \\ \mathrm{e_{1y}} \\ \mathrm{e_{1z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{1x}{}^2 + e_{1y}{}^2 + e_{1z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$$-8 * \mathrm{e_{1x}} + 0 * \mathrm{e_{1y}} \quad + 4 * \mathrm{e_{1z}} = 0$$

$$0 * \mathrm{e_{1x}} - 7 * \mathrm{e_{1y}} \quad + 0 * \mathrm{e_{1z}} = 0$$

$$4 * \mathrm{e_{1x}} + 0 * \mathrm{e_{1y}} \quad - 2 * \mathrm{e_{1z}} = 0$$

A második egyenletből

$$-7 * \mathrm{e_{1y}} = 0 \quad \mathrm{e_{1y}} = 0$$

Az első és harmadik egyenlet nem független egymástól. Az első egyenletből

$$2 * \mathrm{e_{1x}} - \mathrm{e_{1z}} = 0$$

Ezeket behelyettesítve a kiegészítő egyenletbe:

$$e_{1x}{}^2 + 4 * e_{1x}{}^2 = 1 \qquad e_{1x} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad e_{1z} = \pm\frac{2*\sqrt{5}}{5}$$

Ezzel megkaptuk az első sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$\mathbf{e}_1 = \left[\frac{\sqrt{5}}{5} \quad 0 \quad \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$ vagy $\boldsymbol{e_1}^* = \left[-\frac{\sqrt{5}}{5} \quad 0 \quad -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

Az második sajátvektor $\mathbf{e}_2 = [e_{2x} \quad e_{2y} \quad e_{2z}]$ számítása:

$$\begin{bmatrix} (-4+3) & 0 & 4 \\ 0 & (-3+3) & 0 \\ 4 & 0 & (2+3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{2x}} \\ \mathrm{e_{2y}} \\ \mathrm{e_{2z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{2x}{}^2 + e_{2y}{}^2 + e_{2z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$$-1 * \mathrm{e_{2x}} + 0 * \mathrm{e_{2y}} \quad + 4 * \mathrm{e_{2z}} = 0$$

$$0 * \mathrm{e_{2x}} - 0 * \mathrm{e_{2y}} \quad + 0 * \mathrm{e_{2z}} = 0$$

$$4 * \mathrm{e_{2x}} + 0 * \mathrm{e_{2y}} \quad + 5 * \mathrm{e_{2z}} = 0$$

Az első és harmadik egyenletnek csak az $\mathrm{e_{2x}} = 0$ illetve az $\mathrm{e_{2z}} = 0$ lehet a megoldása.

Ezeket behelyettesítve a kiegészítő egyenletbe:

$e_{2y}{}^2 = 1 \qquad e_{2y} = \pm 1$

Ezzel megkaptuk a második sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$\mathbf{e}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]$ vagy $\boldsymbol{e_2}^* = [0 \quad -1 \quad 0]$

A harmadik sajátvektor $\mathbf{e}_3 = [e_{3x} \quad e_{3y} \quad e_{3z}]$ számítása:

$$\begin{bmatrix} (-4+6) & 0 & 4 \\ 0 & (-3+6) & 0 \\ 4 & 0 & (2+6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e_{3x}} \\ \mathrm{e_{3y}} \\ \mathrm{e_{3z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és

$$e_{2x}{}^2 + e_{2y}{}^2 + e_{2z}{}^2 = 1$$

A mátrix egyenlet skaláris formában

$2 * e_{3x} + 0 * e_{3y} + 4 * e_{3z} = 0$

$0 * e_{3x} + 3 * e_{3y} + 0 * e_{3z} = 0$

$4 * e_{3x} + 0 * e_{3y} + 8 * e_{3z} = 0$

A második egyenletből

$3 * e_{3y} = 0 \quad e_{3y} = 0$

Az első és harmadik egyenlet nem független egymástól. Az első egyenletből

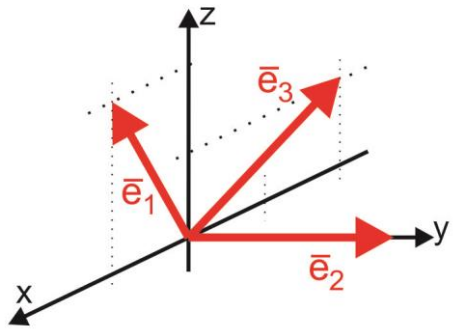
$$e_{3x} = -2e_{3z}$$

Ezeket behelyettesítve a kiegészítő egyenletbe:

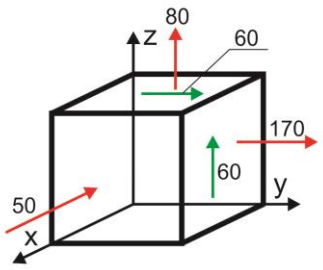
$4 * {e_{3z}}^2 + {e_{3z}}^2 = 1 \quad e_{3z} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \quad e_{3x} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Ezzel megkaptuk a harmadik sajátértékhez tartozó sajátvektort:

$\mathbf{e}_3 = \left[-\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ vagy $\boldsymbol{e_3}^* = \left[\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad 0 \quad -\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$



9. feladat




Határozza meg az alakváltozási tenzort!

$E = 2 * 10^5$ MPa $\quad m$ =10/3

A feszültségtenzor

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 60 \\ 0 & 60 & 80 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Az alakváltozási tenzor elemei az alábbi összefüggéssel számítható

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2 * \mathrm{G}}\left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{\mathrm{m}+1}\Phi_{\mathrm{I}}\mathbf{E}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} =$$

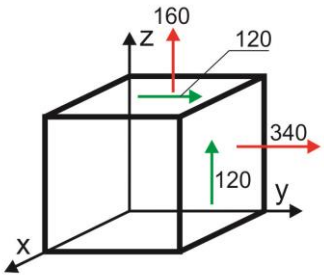
$$= \frac{1}{2 * G} * \left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{1}{m+1} * (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$2\mathrm{G} = \frac{E}{1+\nu} \qquad \nu = \frac{1}{1+m} \qquad \Phi_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

A behelyettesítések után kapjuk

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -6{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 8{,}05 & 3{,}9 \\ 0 & 3{,}9 & 2{,}2 \end{bmatrix}$$

10. feladat




Határozza meg az elemi hasábon ábrázolt feszültségállapottal egyenértékű feszültségeket a MOHR és a HMH elmélet szerint!

A feszültségtenzor

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 340 & 120 \\ 0 & 120 & 160 \end{bmatrix}$$

A főfeszültségek számítása az alábbiak szerint történik:

$$det\begin{bmatrix} (0-\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & (340-\sigma) & 120 \\ 0 & 120 & (160-\sigma) \end{bmatrix} =$$

$$= (0-\sigma) * [(340-\sigma) * (160-\sigma) - 120^2] = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása:

$\sigma_1 = 400$ MPa $\quad \sigma_2 = 100$ MPa $\quad \sigma_3 = 0$ MPa.

Egyenértékű feszültség MOHR elmélete szerint

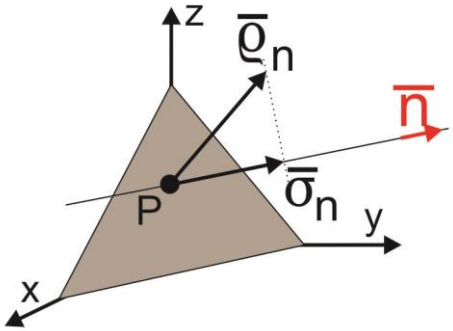
$$\sigma_{egyMOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 400 \ \text{MPa}$$

Egyenértékű feszültség a HMH elmélet szerint

$$\sigma_{egy} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(300)^2 + (100)^2 + (400)^2]} = 360{,}6 \ \text{MPa}$$

11. feladat




Egy gépalkatrész „P” pontjának feszültségállapotát a feszültségi tenzorral adtuk meg az x,y,z koordinátarendszerben. A „P” ponton átmenő metsződsík normál vektora $\bar{\mathbf{n}}$ !

$$\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{10}[3 \quad 4 \quad 5]$$

Határozzuk meg a metszősíkon ható normálfeszültség értékét!

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 120 & 30 & 0 \\ 30 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

A síkhoz tartozó feszültségvektor a tenzor segítségével: $\boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{\Phi n}$

A feszültségvektor síkra merőleges komponensét a skalár szorzással kapjuk meg:

$$\sigma_n = \mathbf{n}\,\boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{n\Phi n}$$

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} \frac{3*\sqrt{2}}{10} & \frac{4*\sqrt{2}}{10} & \frac{5*\sqrt{2}}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 & 30 & 0 \\ 30 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3*\sqrt{2}}{10} \\ \frac{4*\sqrt{2}}{10} \\ \frac{5*\sqrt{2}}{10} \end{bmatrix} = 150 \text{ MPa}$$

12. feladat

Egy gépalkatrész felületi pontjához tartozó feszültségek:

$\sigma_1 = 100$ MPa $\quad \sigma_2 = 0$ MPa $\quad \sigma_3 = 150$ MPa.

Határozzuk meg a főnyúlások nagyságát! Számítsuk ki a az egyenértékű vagy redukált feszültség - $\sigma_{egy} = \sigma_{red}$- nagyságát a HMH elmélet szerint!

Adatok: $G = 8 * 10^4$ MPa $\quad m = 4 \quad E = 2 * 10^5$ MPa

Mivel a megadott feszültségek főfeszültségek, a feszültségi tenzor a következő:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

Az alakváltozási tenzor az alábbi összefüggés alapján számítható:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2 * G}\left(\mathbf{\Phi} + \frac{1}{m+1}\Phi_I \mathbf{E}\right)$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{16}10^{-4}\left(\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}(100+150)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}125 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}125 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}25 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

A főnyúlások

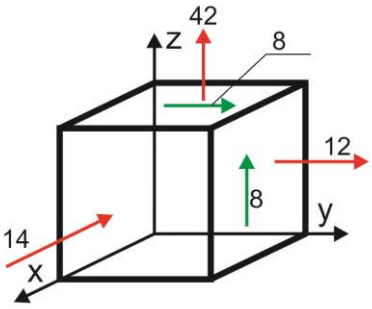
$$\varepsilon_1 = 6{,}25 \quad \varepsilon_2 = 3{,}125 \quad \varepsilon_3 = -3{,}125$$

Az egyenértékű feszültség a HMH elmélet szerint:

$$\sigma_{egy} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[(100)^2 + (150)^2 + (50)^2]}$$

$$\sigma_{egy} = 50\sqrt{7} = 132{,}3 \text{ MPa}$$

13. feladat




Egy gépalkatrész valamely „P” pontjának feszültségállapotát az elemi hasábon bejelölt feszültségek jellemzik. Számítsuk ki a főfeszültségek értékeit valamint az egyenértékű feszültségeket a MOHR és a HMH elmélet szerint!

Első lépésként írjuk föl a feszültségtenzort:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 8 \\ 0 & 8 & 42 \end{bmatrix}$$

A főfeszültségek számítása az alábbiak szerint történik:

$$det\begin{bmatrix} (-14-\sigma) & 0 & 0 \\ 0 & (12-\sigma) & 8 \\ 0 & 8 & (42-\sigma) \end{bmatrix} = (-14-\sigma) * [(12-\sigma) * (42-\sigma) - 8^2] = 0$$

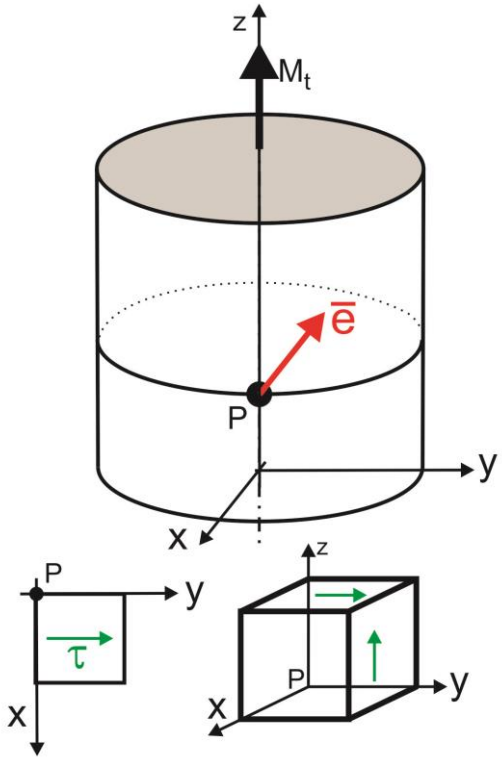
A karakterisztikus egyenlet megoldása:

$\sigma_1 = 44$ MPa $\quad \sigma_2 = 10$ MPa $\quad \sigma_3 = -14$ MPa.

$$\sigma_{egyHMH} = \sqrt{\frac{1}{2}[(34)^2 + (24)^2 + (58)^2]} = 50{,}5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{egyMOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 44 - (-14) = 58\ MPa$$

14. feladat




A tömör keresztmetszetű, D átmérőjű rudat $M_t$ csavaró nyomaték terheli. Az igénybevétel tiszta csavarás.
Mekkora fajlagos nyúlás jön létre a henger palástfelületén lévő „P” pontban az alkotóval $45^o$-os szöget bezáró irányban?

$$\mathrm{E} = 2 * 10^5\ \mathrm{MPa} \quad m = \frac{10}{3}$$

A palást „P” pontjához tartozó feszültségtenzor:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ahol } \tau = \frac{\mathrm{M_t}}{\mathrm{I_p}} * \frac{\mathrm{D}}{2}$$

A ponthoz tartozó alakváltozási tenzort az alábbi összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2 * G}\left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{\mathrm{m}+1}\Phi_{\mathrm{I}}\mathbf{E}\right)$$

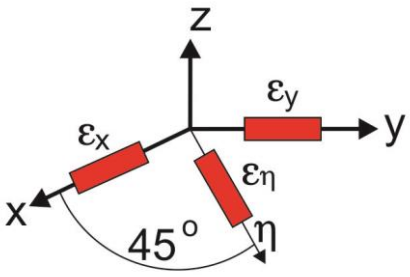
Az alakváltozási tenzor

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\tau}{2 * \mathrm{G}} \\ 0 & \dfrac{\tau}{2 * \mathrm{G}} & 0 \end{bmatrix}$$

Az $\bar{\mathbf{e}}$ vektor irányú fajlagos nyúlást az alábbi kifejezés adja:

$$\varepsilon_{\mathrm{e}} = \mathbf{eUe} \quad \text{ahol } \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\tau}{2 * \mathrm{G}} \\ 0 & \dfrac{\tau}{2 * \mathrm{G}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\tau}{2 * \mathrm{G}} = \frac{\tau\left(1 + \frac{3}{10}\right)}{\mathrm{E}}$$




15. feladat

A test felületének egy terheletlen „P” pontjában a következő nyúlásokat mérjük:

$\varepsilon_x = -2 * 10^{-4}$ $\varepsilon_y = 1 * 10^{-4}$ $\varepsilon_\eta = 1{,}5 * 10^{-4}$

$G = 4 * 10^4$ MPa $\nu = 0{,}2$

Határozzuk meg – rugalmas alakváltozást feltételezve – a „P” ponthoz tartozó alakváltozási tenzort és feszültségtenzort az x,y,z koordinátarendszerben!

Az alábbi tenzoroknál feltüntettük az általános alakot valamint a konkrét feladatra alkalmazandó alakját is. Ügyeljünk arra, hogy bár a $\sigma_z$=0, a z irányú fajlagos nyúlás az $\varepsilon_z$ nem nulla.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

A tenzor elemeinek kiszámításához a következő összefüggéseket használjuk:

$$\mathbf{\Phi} = 2 * G\left(\mathbf{U} + \frac{1}{m-2} U_I \mathbf{E}\right) \quad \text{illetve} \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2*G}\left(\mathbf{\Phi} + \frac{1}{m+1}\Phi_I \mathbf{E}\right)$$

Az η tengelyhez tartozó egységvektor: $\mathbf{e}_\eta = [\cos 45^0 \quad \sin 45^0 \quad 0] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right]$

Fejezzük ki az ismert $\varepsilon_\eta$ fajlagos nyúlást az alakváltozási tenzor segítségével:

$$\varepsilon_\eta = \mathbf{e}_\eta \mathbf{U} \mathbf{e}_\eta = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} * 10^{-4} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 1{,}5 * 10^{-4}$$

Az egyenlet megoldásaként kapjuk: $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = 2$

Fejezzük ki az ismert $\sigma_z = 0$ értéket az alakváltozási tenzor segítségével:

$$\sigma_z = 0 = 2 * G * \left( \varepsilon_z + \frac{1}{5-2} * \left( \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right) \right)$$

Az egyenlet megoldása: $\varepsilon_z = 0{,}25 * 10^{-4}$

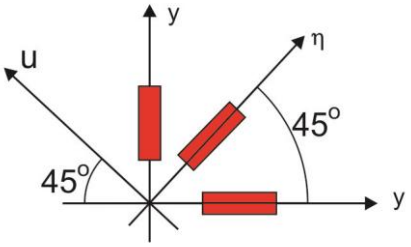
A fent meghatározott értékekkel a keresett alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

Az alakváltozási tenzorból az ismert összefüggéssel megkapjuk a feszültségtenzort:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -18 & 16 & 0 \\ 16 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

16. feladat




A gépalkatrész felületén egy „P” pontban elhelyezett nyúlásmérő bélyegek az alábbi adatokat szolgáltatták:

$\varepsilon_x = 8 * 10^{-4} \quad \varepsilon_y = -4 * 10^{-4} \quad \varepsilon_\eta = 3 * 10^{-4}$

$G = 8 * 10^4$ MPa $\quad m = 4 \quad E = 2 * 10^5$ MPa

Számítsuk ki a bejelölt „u” irányhoz $\varepsilon_u$ valamint az $\varepsilon_z$ fajlagos nyúlásokat a $\sigma_z = 0$ feltétel mellett!

Az alábbi tenzoroknál feltüntettük az általános alakot valamint a konkrét feladatra alkalmazandó alakját is. Ügyeljünk arra, hogy bár a $\sigma_z$=0, a z irányú fajlagos nyúlás az $\varepsilon_z$ nem nulla.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

A tenzor elemeinek kiszámításához a következő összefüggéseket használjuk:

$$\mathbf{\Phi} = 2 * G\left(\mathbf{U} + \frac{1}{m-2} U_I \mathbf{E}\right) \quad \text{illetve} \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2*G}\left(\mathbf{\Phi} - \frac{1}{m+1}\Phi_I \mathbf{E}\right)$$

Az η tengelyhez tartozó egységvektor: $\mathbf{e}_\eta = [\cos 45^0 \quad \sin 45^0 \quad 0] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right]$

Fejezzük ki az ismert $\varepsilon_\eta$ fajlagos nyúlást az alakváltozási tenzor segítségével:

$$\varepsilon_\eta = \mathbf{e}_\eta \mathbf{U} \mathbf{e}_\eta = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right] \begin{bmatrix} 8 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} * 10^{-4} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 3 * 10^{-4}$$

Az egyenlet megoldásaként kapjuk: $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = 1$

Fejezzük ki az ismert $\sigma_z = 0$ értéket az alakváltozási tenzor segítségével:

$$\sigma_z = 0 = 2 * G * \left(\varepsilon_z + \frac{1}{5-2} * (8 - 4 + \varepsilon_z) * 10^{-4}\right)$$

Az egyenlet megoldása: $\varepsilon_z = -\frac{4}{3}$

A fent meghatározott értékekkel a keresett alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

Az u tengely irányába eső $\varepsilon_u$ számítása:

$$\mathbf{e}_\mathrm{u} = [-\cos 45^0 \quad \sin 45^0 \quad 0] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right]$$

$$\varepsilon_\mathrm{u} = \mathbf{e}_\mathrm{u}\mathbf{U}\mathbf{e}_\mathrm{u} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0\right] \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} * 10^{-4} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 1 * 10^{-4}$$

Az $\varepsilon_\mathrm{u}$ számítására létezik egy rövidebb út is:

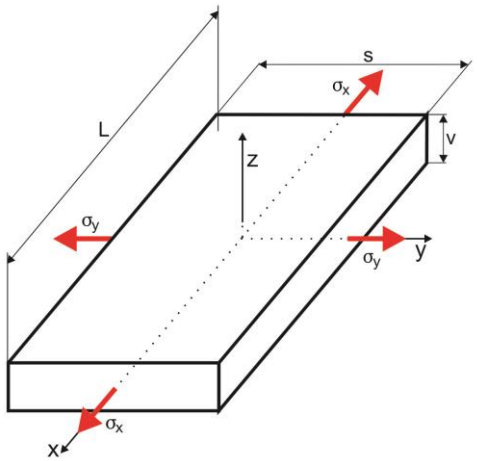
Az x,y,z és η,u,z koordinátarendszer ugyanahhoz a „P” ponthoz tartozik, tehát a hozzájuk tartozó alakváltozási tenzorok első skalár invariánsa megegyezik:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_\eta + \varepsilon_u + \varepsilon_z$$

Ebből

$$\varepsilon_u = \varepsilon_x + \varepsilon_y - \varepsilon_\eta = (8 - 4 - 3) * 10^{-4} = 1 * 10^{-4}$$

17. feladat




Egy v vastagságú lemezre x irányban $\sigma_x$ nagyságú húzófeszültség működik.
Mekkora feszültség működjön y irányba, hogy a lemez szélessége ne változzon?
Mennyivel változik meg a lemez vastagsága?

Adott: m, E, ν, $\sigma_x$

A fajlagos nyúlás a definíció szerint:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{L} = \frac{F * L}{A * E * L} = \frac{F}{A} * \frac{1}{E} = \frac{\sigma}{E}$$

A $\sigma_x$ feszültség hatására az x irányú fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

A hosszirányú fajlagos nyúlás hatására keresztirányú fajlagos méretváltozás is bekövetkezik:

$$\varepsilon_y = \nu * \varepsilon_x = \frac{1}{m}\varepsilon_x = \nu\frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_y}{E}$$

A fenti egyenletből következik: $\sigma_y = \nu * \sigma_x$.

Mivel mind az x, mind az y irányú fajlagos nyúlás hatással van a z irányú fajlagos nyúlásra ( rövidülésre )

$$\varepsilon_z = -\left(\frac{\varepsilon_x}{m} + \frac{\varepsilon_y}{m}\right) = -\left(\frac{\sigma_x}{m * E} + \frac{\sigma_y}{m * E}\right) = -\left(\frac{\sigma_x}{m * E} + \frac{\sigma_x}{m^2 * E}\right) =$$
$$= -\frac{1}{m * E}\left(\sigma_x + \frac{\sigma_x}{m}\right)$$

A v méret a két húzófeszültség hatására megváltozik. Ennek a változásnak a nagysága

$$\Delta z = v * \varepsilon_z = -\frac{v}{m * E}\left(\sigma_x + \frac{\sigma_x}{m}\right)$$