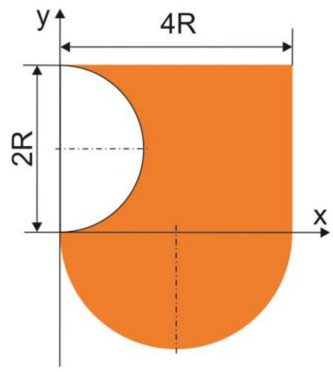
1. feladat

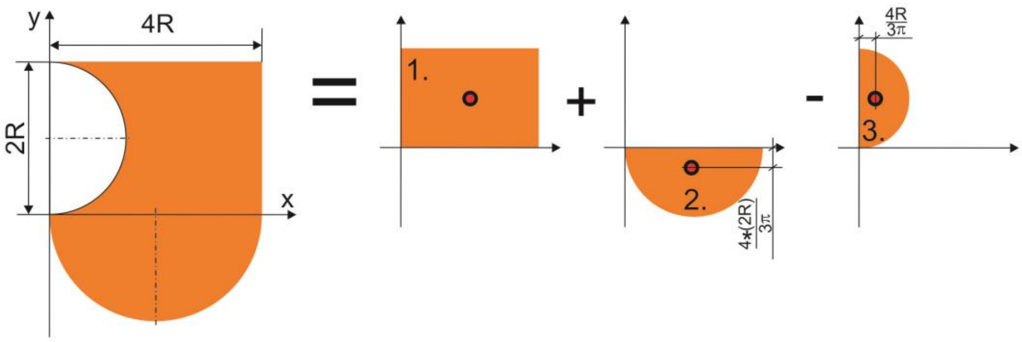


Határozza meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékait I_x, I_y, I_{xy}!

R= 3 cm

Írja föl a berajzolt koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomatéki tenzort $\mathbf{I}_{xy}$!

Bontsuk fel a síkidomot olyan síkidom részekre, amelyeknél ismerjük a saját másodrendű nyomatékaikat.



$$I_x = \left[\frac{12 * 6^3}{12} + (12 * 6) * 3^2\right] + \left[\frac{12^4 * \pi}{128}\right] - \left[\frac{6^4 * \pi}{128} + \frac{3^2 * \pi}{2} * 3^2\right]$$

$$I_x = 883{,}64\ \text{cm}^4$$

$$I_y = \left[\frac{6 * 12^3}{12} + (12 * 6) * 6^2\right] + \left[\frac{12^4 * \pi}{128} + \frac{6^2 * \pi}{2} * 6^2\right] - \left[\frac{6^4 * \pi}{128}\right]$$

$$I_x = 5967{,}61\ \text{cm}^4$$

$$I_{xy} = [0 + (12 * 6) * (6) * (3)] + \left[0 + \frac{6^2 * \pi}{2}(6) * \left(-\frac{4 * 6}{3\pi}\right)\right] - \left[0 + \frac{3^2 * \pi}{2}(3) * \left(\frac{4 * 3}{3\pi}\right)\right]$$

$$I_{xy} = 378\ \text{cm}^4$$

$$\mathbf{I}_{xy} = \begin{bmatrix} 883{,}64 & -378 \\ -378 & 5967{,}61 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

2. feladat

Ismert az xy koordinátarendszerben a másodrendű nyomatéki tenzor. Határozzuk meg a főmásodrendű nyomatékokat és a főirányokat!

$$\mathbf{I}_{\mathrm{xy}} = \begin{bmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 50 \end{bmatrix} \mathrm{cm}^4$$

Sajátérték feladat:

$$\det\left[\mathbf{I}_{\mathrm{xy}} - \lambda * \mathbf{E}\right] = 0$$

$$det \begin{bmatrix} (100-\lambda) & -40 \\ -40 & (50-\lambda) \end{bmatrix} = \lambda^2 - 150\lambda + 3400 = 0$$

$$\lambda_1 = 122{,}17 \qquad \lambda_2 = 27{,}83$$

A főmásodrendű nyomatékok ($\mathrm{I}_1 > \mathrm{I}_2$):

$\mathrm{I}_1 = 122{,}17\ \mathrm{cm}^4$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{I}_2 = 27{,}83\ \mathrm{cm}^4$

Sajátvektor feladat:

A saját vektor feladatban az $\mathbf{e}_1 = \cos\varphi\ \mathbf{i} + \sin\varphi\ \mathbf{j}$ az $\mathbf{e}_2 = \cos\alpha\ \mathbf{i} + \sin\alpha\ \mathbf{j}$ alakban használjuk az egységvektorokat.

$$\left[\mathbf{I}_{\mathbf{xy}} - \mathrm{I}_1\mathbf{E}\right]\boldsymbol{e}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} (100-122{,}17) & -40 \\ -40 & (50-122{,}17) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-22{,}17\ cos\varphi - 40\ sin\varphi = 0$$

$$tg\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = -\frac{22{,}17}{40}$$

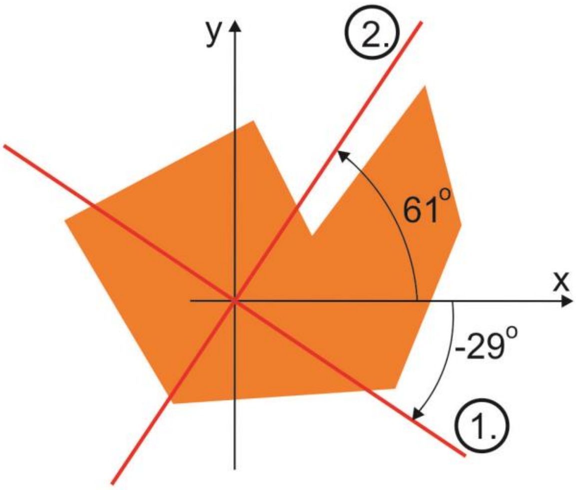
$$\varphi \cong -29^0$$

$$\begin{bmatrix} (100-27{,}83) & -40 \\ -40 & (50-27{,}83) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$72{,}17\ cos\alpha - 40\ sin\alpha = 0$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = -\frac{22{,}17}{40}$$

$$\alpha \cong +61^0$$

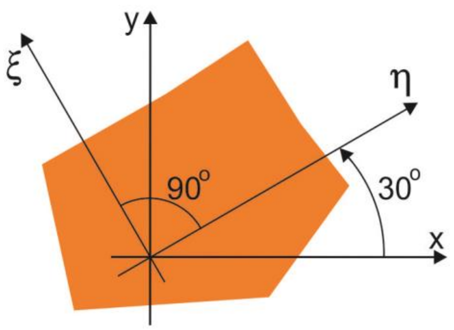


Az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ egységvektorok által kijelölt irányok a főirányok.

A főtengelyek koordinátarendszerében a másodrendű nyomatékok tenzora az alábbi.

$$\mathbf{I}_{1,2} = \begin{bmatrix} 122{,}17 & 0 \\ 0 & 27{,}83 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

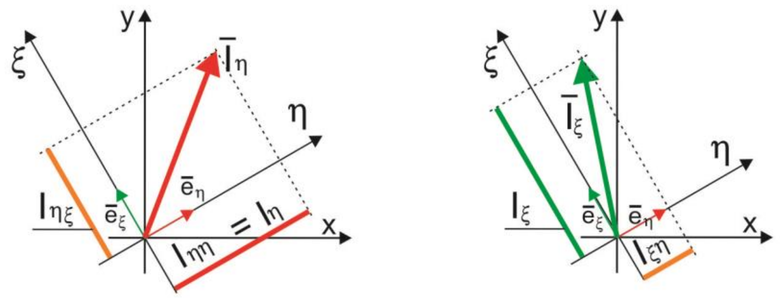
3. feladat



Ismert az xy koordinátarendszerben a másodrendű nyomatékok tenzora. Határozzuk meg a másodrendű nyomatékok tenzorát a $\xi\eta$ koordinátarendszerben, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti xy rendszert elforgatjuk +30 fokkal!

$$\mathbf{I}_{\mathrm{xy}} = \begin{bmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} \ \mathrm{cm}^4$$

Az új koordinátarendszerben a másodrendű nyomatékok értékeinek kiszámításához nyújt segítséget a következő ábra:



$$\mathbf{e}_\eta = [cos30^0 \quad sin30^0] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_\xi = [-sin30^0 \quad cos30^0] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_\eta = \mathbf{I}_{\mathrm{xy}} * \mathbf{e}_\eta \qquad \mathrm{I}_{\eta\eta} = \mathrm{I}_\eta = \mathbf{e}_\eta * \mathbf{I}_\eta = \mathbf{e}_\eta * \mathbf{I}_{\mathrm{xy}} * \mathbf{e}_\eta$$

$$\mathrm{I}_\eta = \mathrm{I}_{\eta\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 131{,}7$$

$$\mathbf{I}_\xi = \mathbf{I}_{\mathrm{xy}} * \mathbf{e}_\xi \qquad \mathrm{I}_{\xi\xi} = \mathrm{I}_\xi = \mathbf{e}_\xi * \mathbf{I}_\xi = \mathbf{e}_\xi * \mathbf{I}_{\mathrm{xy}} * \mathbf{e}_\xi$$

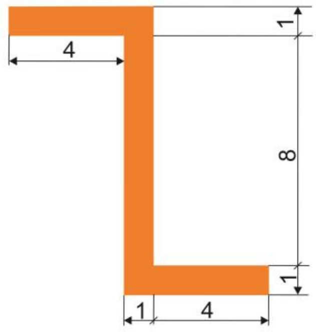
$$\mathrm{I}_\xi = \mathrm{I}_{\xi\xi} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 168{,}3$$

$$\mathrm{I}_{\xi\eta} = \mathbf{e}_\eta * \mathbf{I}_\xi = \mathbf{e}_\eta * \mathbf{I}_{\mathrm{xy}} * \mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_\xi * \mathbf{I}_\eta = \mathbf{e}_\xi * \mathbf{I}_{\mathrm{xy}} * \mathbf{e}_\eta$$

$$I_{\xi\eta} = I_{\eta\xi} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & -50 \\ -50 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 18{,}3$$

$$\mathbf{I}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 131{,}7 & 18{,}3 \\ 18{,}3 & 168{,}3 \end{bmatrix}\ \mathrm{cm}^4$$

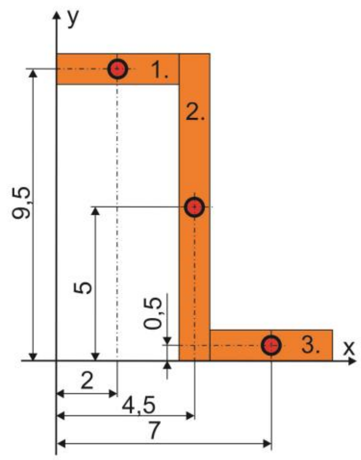
4. feladat



Határozzuk meg a vázolt síkidom súlyponti főmásodrendű nyomatékait és a főirányokat!

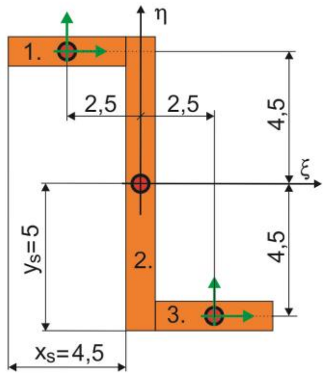
A távolságok cm-ben vannak megadva.

Első lépésként határozzuk meg a súlypont helyét. Ehhez készítsük el az alábbi táblázatot. A táblázat kitöltésében segít a 2. ábra.



	A_i	x_i	y_i	$x_i * A_i$	$y_i * A_i$
1.	4	2	9,5	8	38
2.	10	4,5	5	45	50
3.	4	7	0,5	28	2
	18			81	90

$$x_s = \frac{81}{18} = 4{,}5 \qquad y_s = \frac{90}{18} = 5$$



Az alábbiakban ξη koordinátarendszerben a másodrendű nyomatékok számítását mutatjuk be.

$$I_\xi = I_{\xi 1} + I_{\xi 2} + I_{\xi 3}$$

$$I_\eta = I_{\eta 1} + I_{\eta 2} + I_{\eta 3}$$

$$I_{\eta\xi} = I_{\eta\xi 1} + I_{\eta\xi 2} + I_{\eta\xi 3}$$

$$I_\xi = \left[\frac{4 * 1^3}{12} + (4 * 1) * 4{,}5^2\right] + \left[\frac{1 * 10^3}{12}\right] + \left[\frac{4 * 1^3}{12} + (4 * 1) * 4{,}5^2\right] = 250$$

$$I_\eta = \left[\frac{1 * 4^3}{12} + (4 * 1) * 2{,}5^2\right] + \left[\frac{10 * 1^3}{12}\right] + \left[\frac{1 * 4^3}{12} + (4 * 1) * 2{,}5^2\right] = 61{,}5$$

$$I_{\eta\xi} = [0 + (4 * 1) * (4{,}5) * (-2{,}5)] + [0] + [0 + (4 * 1) * (2{,}5) * (-4{,}5)] = -90$$

A számított másodrendű nyomatékokkal a $\xi\eta$ koordinátarendszerben a tenzor az alábbi:

$$\mathbf{I}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 250 & 90 \\ 90 & 61{,}5 \end{bmatrix} \ \mathrm{cm}^4$$

A főmásodrendű nyomatékok és a hozzájuk tartozó főirányok meghatározásához oldjuk meg a sajátérték-sajátvektor feladatot.

$$\det \begin{bmatrix} (250-\lambda) & 90 \\ 90 & (61{,}5-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 311{,}5\lambda + 7275 = 0$$

$$\lambda_1 = 286{,}07 \quad \lambda_2 = 25{,}43$$

A főmásodrendű nyomatékok: $\mathrm{I}_1 = 286{,}07\ \mathrm{cm}^4 \quad \mathrm{I}_2 = 25{,}43\ \mathrm{cm}^4$

Az I_1 főmásodrendű nyomatékhoz tartozó főirányt az alábbi mátrixegyenlet megoldásával kapjuk, ahol az egységvektort $[\cos\varphi \quad \sin\varphi]$ alakban használjuk.

$$\begin{bmatrix} (250-286{,}07) & 90 \\ 90 & (61{,}5-286{,}07) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-36{,}07\cos\varphi + 90\sin\varphi = 0$$

$$\varphi = 21{,}81^0$$

Az I_2 főmásodrendű nyomatékhoz tartozó főirány az előző irányra merőleges.