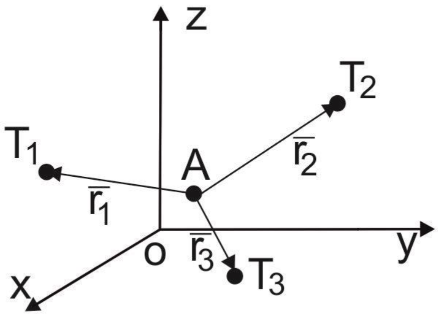
1. feladat



Határozza meg a T_i támadáspontú $\mathbf{F}_i$erőrendszer nyomatékát az A pontra.

T_1 (3, 0, 5) $\mathbf{F}_1 = 0\ \mathbf{i} + 300\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$

T_1 (0, 4, 5) $\mathbf{F}_2 = 0\ \mathbf{i} - 100\ \mathbf{j} - 400\ \mathbf{k}$

T_1 (3, 4, 2) $\mathbf{F}_3 = 100\ \mathbf{i} - 100\ \mathbf{j} + 500\ \mathbf{k}$

A (2, 2, 4)

Definíció szerint:

$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_i \mathrm{x} \mathbf{F}_i$

ahol az **r** vektor az A pontból a T_i támadáspontba mutató vektor.

$$\mathbf{r}_1 = +1\ \mathbf{i} - 2\ \mathbf{j} + 1\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 = -2\ \mathbf{i} + 2\ \mathbf{j} + 1\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 = +1\ \mathbf{i} + 2\ \mathbf{j} - 2\ \mathbf{k}$$

$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ mivel a rendszer nem tartalmaz koncentrált nyomatékot.

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 300 & 0 \end{vmatrix} = -300\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 300\ \mathbf{k}$$

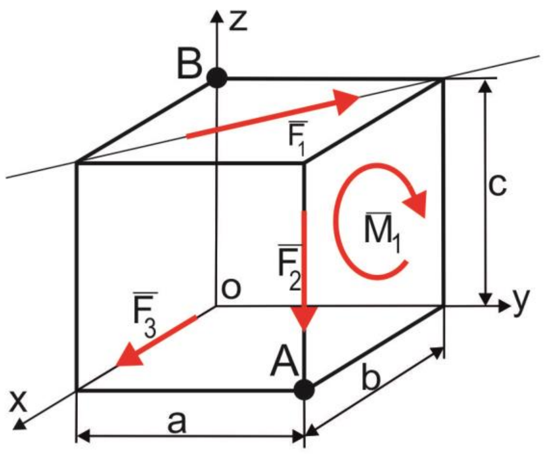
$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -100 & -400 \end{vmatrix} = -700\ \mathbf{i} - 800\ \mathbf{j} + 200\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 \mathrm{x} \mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 100 & -100 & 500 \end{vmatrix} = 800\ \mathbf{i} - 700\ \mathbf{j} - 300\ \mathbf{k}$$

Az $\mathbf{M}_A$ vektor tehát a három vektori szorzat előjelhelyes összege:

$$\mathbf{M}_A = -200\ \mathbf{i} - 1500\ \mathbf{j} + 200\ \mathbf{k}$$

2. feladat



Határozzuk meg az alábbiakban megadott erőrendszer nyomatékát az A és B pontokra!

$$|\mathbf{F}_1| = \mathrm{F}_1 = 500\ [N]$$
$$|\mathbf{F}_2| = \mathrm{F}_2 = 400\ [N]$$
$$|\mathbf{F}_1| = \mathrm{F}_3 = 300\ [N]$$
$$|\mathbf{M}_1| = \mathrm{M}_1 = 200\ [Nm]$$

a = 3 m b = 4 m c = 5 m

Az erők vektoros alakja:

$$\mathbf{F}_1 = |\mathbf{F}_1|\mathbf{e}_1 = 500\ \frac{-4\ \mathbf{i} + 3\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}}{\sqrt{16+9+0}} = -400\ \mathbf{i} + 300\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_2|\mathbf{e}_2 = 400\ (-\mathbf{k}\,) = 0\mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} - 400\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_3 = |\mathbf{F}_3|\mathbf{e}_3 = 300\ (\mathbf{i}\,) = 300\mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$$

A nyomaték vektoros alakja:

$$\mathbf{M}_1 = 0\ \mathbf{i} - 200\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$$

Az A pontra számított nyomatékvektor meghatározása:

Definíció szerint az A ponthoz tartozó nyomatékvektor:

$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

ahol az **r** vektor az A pontból a T_i támadáspontba mutató vektor.

$\mathbf{r}_1 = +0\ \mathbf{i} - 3\ \mathbf{j} + 5\ \mathbf{k}$ $\mathbf{r}_2 = +0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ $\mathbf{r}_3 = +0\ \mathbf{i} - 3\ \mathbf{j} - 0\ \mathbf{k}$

$$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_1 = 0\ \mathbf{i} - 200\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3 & 5 \\ -400 & 300 & 0 \end{vmatrix} = -1500\ \mathbf{i} - 2000\ \mathbf{j} - 1200\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} = 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 \mathrm{x} \mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 900\,\mathbf{k}$$

Az $\mathbf{M}_A$ vektor tehát a négy résznyomaték előjelhelyes összege:

$$\mathbf{M}_A = -1500\,\mathbf{i} - 2200\,\mathbf{j} - 300\,\mathbf{k}$$

Az B pontra számított nyomatékvektor meghatározása:

Definíció szerint az A ponthoz tartozó nyomatékvektor:

$$\mathbf{M}_B = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

ahol az $\mathbf{r}$ vektor az B pontból a T_i támadáspontba mutató vektor.

$\mathbf{r}_1 = +4\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ $\quad \mathbf{r}_2 = +4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ $\quad \mathbf{r}_3 = +0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$

$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_1 = 0\,\mathbf{i} - 200\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ -400 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 1200\,\mathbf{k}$$

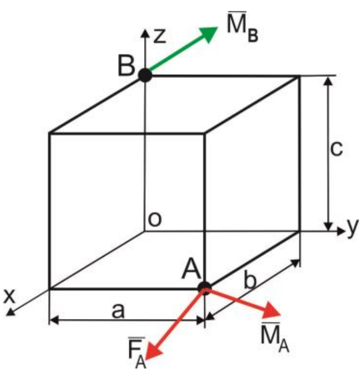
$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} = -1200\,\mathbf{i} + 1600\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 \mathrm{x} \mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -5 \\ 300 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} - 1500\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

Az $\mathbf{M}_B$ vektor tehát a négy résznyomaték előjelhelyes összege:

$$\mathbf{M}_B = -1200\,\mathbf{i} - 100\,\mathbf{j} + 1200\,\mathbf{k}$$

Az B pontra számított nyomatékvektor meghatározása más módszerrel:



Határozzuk meg az eredeti vektorrendszer eredő vektorkettősét az A pontra.

Ebből az $\mathbf{M}_A$ nyomatékvektort már előállítottuk.

Az erő vektorkettős másik tagja:

$\mathbf{F}_A = \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$=-100 **i** + 300 **j** – 400 **k**

Definíció szerint:

$\mathbf{M}_B = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$

ahol $\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_A$

$\mathbf{r}_\mathrm{i} = \mathbf{r}_\mathbf{BA} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k}$

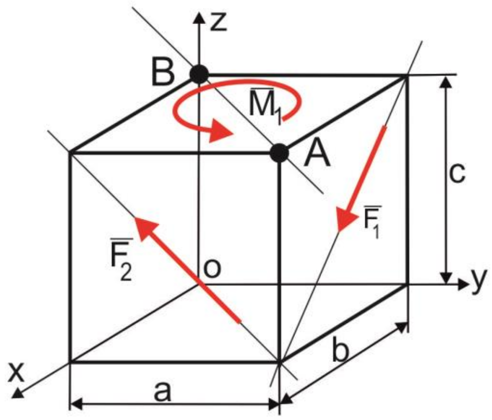
$$\mathbf{r}_{BA} \mathrm{x} \mathbf{F}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & -5 \\ -100 & 300 & -400 \end{vmatrix} = 300\,\mathbf{i} + 2100\,\mathbf{j} + 1500\,\mathbf{k}$$

Ezekkel az értékekkel:

$$\mathbf{M}_B = -1200\,\mathbf{i} - 100\,\mathbf{j} + 1200\,\mathbf{k}$$

Ami természetesen megegyezik az előző számítás alapján kapott értékkel.

3. feladat



Határozzuk meg a megadott erőrendszer nyomatékét az A és B pontokat összekötő egyenesre!

$|\mathbf{F}_1| = 200\sqrt{34}$ [N]

$|\mathbf{F}_2| = 400$ [N]

$|\mathbf{M}_1| = 800$ [Nm]

a = 4 m b = 5 m c = 3 m

Az erők vektoros alakja:

$$\mathbf{F}_1 = |\mathbf{F}_1|\mathbf{e}_1 = 200\sqrt{34}\,\frac{5\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}}{\sqrt{25+0+9}} = 1000\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 600\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_2|\mathbf{e}_2 = 400\,\frac{0\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}}{\sqrt{16+9+0}} = 0\,\mathbf{i} - 320\,\mathbf{j} + 240\,\mathbf{k}$$

A nyomaték vektoros alakja:

$$\mathbf{M}_1 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 800\,\mathbf{k}$$

Az A pontra számított nyomatékvektor meghatározása:

Definíció szerint az A ponthoz tartozó nyomatékvektor:

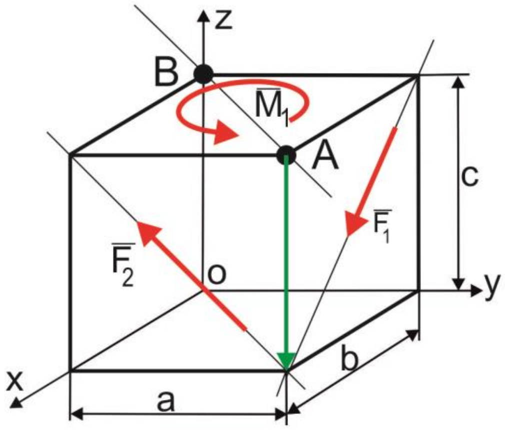
$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_i \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

ahol az **r** vektor az A pontból a T_i támadáspontba mutató vektor.

$\mathbf{r}_1 = +0\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ $\mathbf{r}_2 = +5\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 1000 & 0 & -600 \end{vmatrix} = -2400\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 4000\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -320 & +240 \end{vmatrix} = -2400\,\mathbf{i} - 1200\,\mathbf{j} - 4800\,\mathbf{k}$$



Ugyanezt az eredmény kapjuk akkor is, ha összevonjuk a két erőt és a helyvektort a közös támadáspontba irányítjuk.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 1000\,\mathbf{i} - 320\,\mathbf{j} - 360\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = 5\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

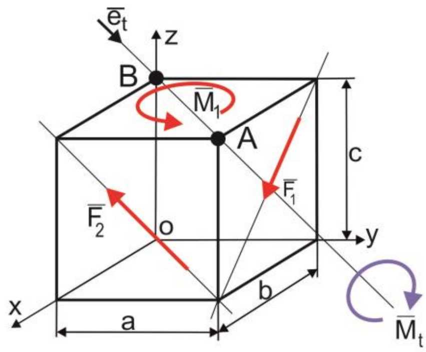
$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{M}_1 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 800\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 4 & -3 \\ 1000 & -320 & -360 \end{vmatrix} = -2400\,\mathbf{i} - 1200\,\mathbf{j} - 5600\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_A = -2400\,\mathbf{i} - 1200\,\mathbf{j} - 4800\,\mathbf{k}$$

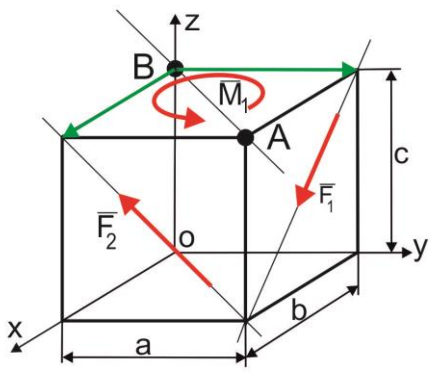
A t tengelyre számított nyomaték meghatározása:



$$\mathbf{M}_\mathrm{t} = \mathbf{M}_\mathrm{A} * \mathbf{e}_\mathrm{t}$$

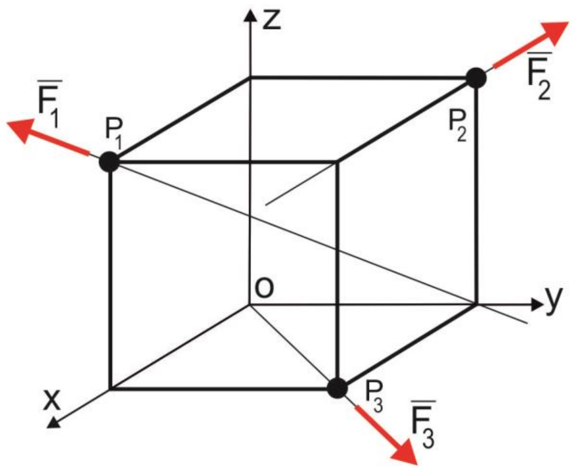
$$\mathbf{e}_\mathrm{t} = \frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{+5\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}}{\sqrt{25 + 16 + 0}} = \\ = \frac{5}{\sqrt{41}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{41}}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_\mathrm{t} = [-2400 \quad -1200 \quad -4800] \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{41}} \\ \frac{4}{\sqrt{41}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-16800}{\sqrt{41}}$$



Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a tengelyre számított nyomatékot a B pontra számított nyomatékvektorból képezzük. Ekkor megváltoznak az erőkhöz tartozó helyvektorok, hiszen most a B pontból indítjuk azokat.

4. feladat



Adott a P_1, P_2, P_3pontokban ható

$\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ erő.

Határozzuk meg az erőrendszer origóba redukált vektorkettősét!

Határozzuk meg a centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektort, valamint a főerőpárt!

Az erő [N] -ban, a távolság [m] -ben adott.

$\mathrm{P}_1(4,0,5)$ $\quad \mathrm{P}_1(0,3,5)$ $\quad \mathrm{P}_1(4,3,0)$

$\mathbf{F}_1 = 4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_2 = -6\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_3 = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

Az eredő vektorkettős számítása:

$$\mathbf{F}_0 = \sum \mathbf{F}_\mathrm{i} = 2\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

$\mathbf{r}_1 = 4\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_2 = +0\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_3 = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

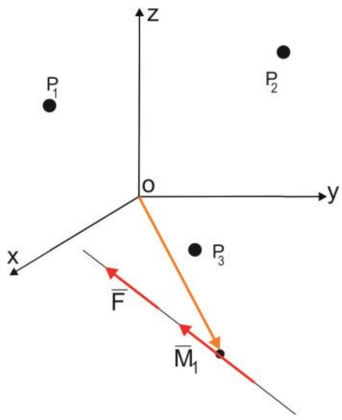
$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 15\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 12\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 5 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} - 30\,\mathbf{j} + 18\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 \mathrm{x} \mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_0 = 15\,\mathbf{i} - 30\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k} \ \ [\mathrm{Nm}]$$

A centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektor meghatározása:



$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F_0}\mathrm{x}\mathbf{M_0}}{\mathbf{F_0}^2}$$

$$\mathbf{F_0}^2 = 2^2 + 0^2 + 5^2 = 29$$

$$\mathbf{F_0}\mathrm{x}\mathbf{M_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 15 & -30 & 6 \end{vmatrix} = 150\,\mathbf{i} + 63\,\mathbf{j} - 60\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{150\,\mathbf{i} + 63\,\mathbf{j} - 60\,\mathbf{k}}{29} = \frac{150}{29}\,\mathbf{i} + \frac{63}{29}\,\mathbf{j} - \frac{60}{29}\,\mathbf{k}$$

Főerőpár:

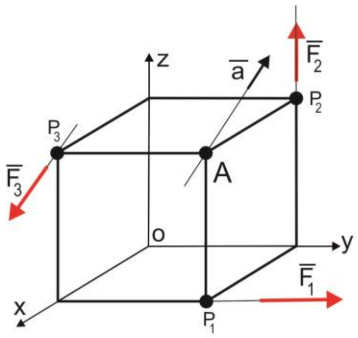
$$\mathbf{M}_1 = \frac{(\mathbf{F}_0\mathbf{M}_0)\mathbf{F}_0}{\mathbf{F_0}^2}$$

$$\mathbf{F}_0\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ -30 \\ 6 \end{bmatrix} = 60$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{60(2\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k})}{29} = \frac{120}{29}\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + \frac{300}{29}\,\mathbf{k}$$

5. feladat

Adott a P_1, P_2, P_3pontokban ható $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ erő.



Határozzuk meg az A ponton átmenő **a** irányú tengelyre számított nyomatékot!

$P_1(3,3,5)$ $P_1(0,3,3)$ $P_1(3,0,3)$

$A(3,3,3)$ $\mathbf{a} = \frac{1}{3}\,\mathbf{i} + \frac{2}{3}\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}_1 = 0\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ $\mathbf{F}_2 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$
$\mathbf{F}_3 = 3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$

Az erő [N] -ban, a távolság [m] -ben adott.

Számítsuk ki az erőrendszer nyomatékát az A pontra:

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} x \mathbf{F}_i$$

$\mathbf{r}_1 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$ $\mathbf{r}_2 = -3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ $\mathbf{r}_3 = 0\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_1 x \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 x \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 x \mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 12\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_A = 21\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k} \;\; [\mathrm{Nm}]$$

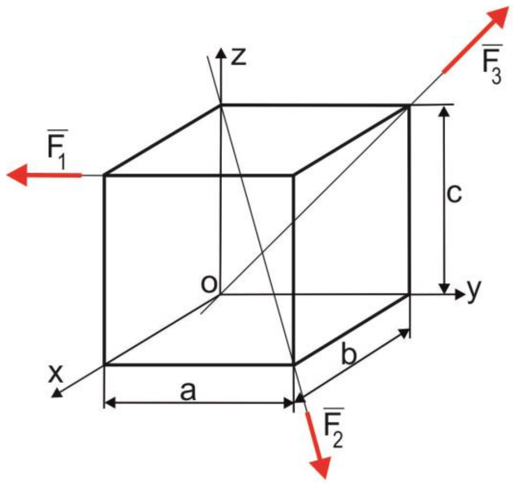
A tengely egységvektora

$$\mathbf{e}_\mathrm{t} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\frac{1}{3}\,\mathbf{i} + \frac{2}{3}\,\mathbf{j} + \frac{2}{3}\,\mathbf{k}}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

A tengelyre számított nyomaték:

$$\mathbf{M}_\mathrm{t} = \mathbf{M}_\mathrm{A} * \mathbf{e}_\mathrm{t} = [21 \quad 12 \quad 9]\begin{bmatrix} \frac{15}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = 21[\mathrm{Nm}]$$

6. feladat



Adott az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ erőrendszer az ábrán rajzoltak szerint.

$|\mathbf{F}_1| = 6$ [N] $\qquad |\mathbf{F}_2| = 5\sqrt{2}$ [N]

$|\mathbf{F}_3| = 5$ [N]

Határozzuk meg az erőrendszer origóba redukált vektorkettősét!

Határozzuk meg a centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektort, valamint a főerőpárt!

Az erő [N] -ban, a távolság [m] -ben adott.

Határozzuk meg az erővektorokat:

$$\mathbf{F}_1 = |\mathbf{F}_1|\mathbf{e}_1 = 6\,(-\mathbf{j}\,) = 0\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_2|\mathbf{e}_2 = 5\sqrt{2}\,\frac{5\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}}{\sqrt{25 + 16 + 9}} = 5\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_3 = |\mathbf{F}_3|\mathbf{e}_3 = 5\,\frac{0\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}}{\sqrt{0 + 16 + 9}} = 0\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

Az origóra redukált vektorkettős erő tagja:

$$\mathbf{F}_0 = \sum \mathbf{F}_i = 5\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

Az origóra redukált vektorkettős nyomatéki tagja:

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

$\mathbf{r}_1 = 5\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_2 = +5\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_3 = 0\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 18\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 30\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -12\,\mathbf{i} + 15\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 x \mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_0 = 6\,\mathbf{i} + 15\,\mathbf{j} - 30\,\mathbf{k} \;\; [\mathrm{Nm}]$$

A centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektor

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_0 x \mathbf{M}_0}{\mathbf{F}_0{}^2}$$

$$\mathbf{F}_0{}^2 = 25 + 4 = 29$$

$$\mathbf{F}_0 x \mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 15 & -30 \end{vmatrix} = -60\,\mathbf{i} + 150\,\mathbf{j} + 63\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{-60\,\mathbf{i} + 150\,\mathbf{j} + 63\,\mathbf{k}}{29} = \frac{-60}{29}\,\mathbf{i} + \frac{150}{29}\,\mathbf{j} + \frac{63}{29}\,\mathbf{k}$$

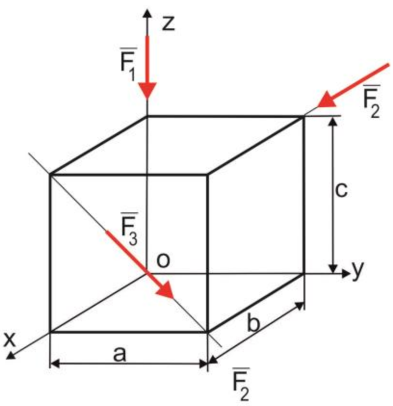
Főerőpár:

$$\mathbf{M}_1 = \frac{(\mathbf{F}_0 \mathbf{M}_0)\mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_0{}^2}$$

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{M}_0 = [5 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ -30 \end{bmatrix} = 60$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{60(5\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k})}{29} = \frac{300}{29}\,\mathbf{i} + \frac{120}{29}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

7. feladat



Határozzuk meg az erőrendszer legegyszerűbb eredőjét!

$|\mathbf{F}_1| = 200 \; [\mathrm{kN}] \qquad |\mathbf{F}_2| = 40 \; [\mathrm{kN}]$

$|\mathbf{F}_3| = 100 \; [\mathrm{kN}]$

Határozzuk meg az eredő vektorkettős az origóra!

Az erők vektoros alakja:

$$\mathbf{F}_1 = 0\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 200\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_2 = 40\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_3 = 100\,\frac{0\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}}{\sqrt{0 + 9 + 16}} = 0\,\mathbf{i} + 60\,\mathbf{j} - 80\,\mathbf{k}$$

Az eredő vektorkettős erő komponense:

$$\mathbf{F}_0 = \sum \mathbf{F}_\mathrm{i} = 40\,\mathbf{i} + 60\,\mathbf{j} - 280\,\mathbf{k}$$

Az eredő vektorkettős nyomatéki komponensének számítása:

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{r}_1 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_2 = 0\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_3 = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ 40 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 160\,\mathbf{j} - 120\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 \mathrm{x} \mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 60 & -80 \end{vmatrix} = -240\,\mathbf{i} + 160\,\mathbf{j} + 120\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_0 = -240\,\mathbf{i} + 320\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \;\; [\mathrm{kNm}]$$

Az $\boldsymbol{F}_0$ és $\boldsymbol{M}_0$ vektorok merőlegességének ellenőrzése:

$$\mathbf{F}_0 * \mathbf{M}_0 = [40 \quad 60 \quad -280] \begin{bmatrix} -240 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix} = 9600$$

A két vektor nem merőleges egymásra, tehát az eredő erőcsavar.

A centrális egyenes egy pontját kijelölő vektor meghatározása:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_0 \mathrm{x} \mathbf{M}_0}{\mathbf{F}_0{}^2}$$

$$\mathbf{F}_0{}^2 = 40^2 + 60^2 + 280^2 = 83600$$

$$\mathbf{F}_0 \mathrm{x} \mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 40 & 60 & -280 \\ -240 & 320 & 0 \end{vmatrix} = 89600\,\mathbf{i} + 67200\,\mathbf{j} + 27200\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{89600\,\mathbf{i} + 67200\,\mathbf{j} + 27200\,\mathbf{k}}{83600} \cong 1{,}072\,\mathbf{i} + 0{,}804\,\mathbf{j} + 0{,}325\,\mathbf{k}$$

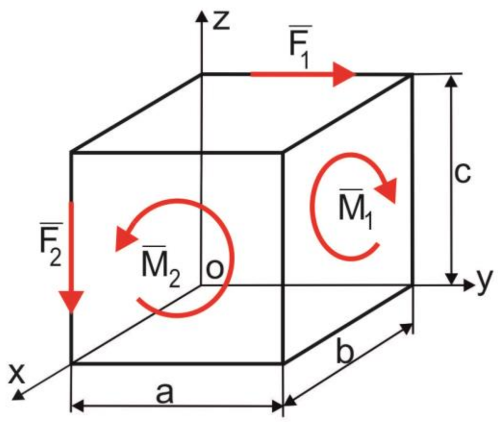
Főerőpár számítása:

$$\mathbf{M}_1 = \frac{(\mathbf{F}_0 \mathbf{M}_0)\mathbf{F}_0}{\mathbf{F}_0{}^2}$$

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{M}_0 = 9600$$

$$\mathbf{M}_1 = \frac{9600(40\,\mathbf{i} + 60\,\mathbf{j} - 280\,\mathbf{k})}{83600} \cong 4{,}593\,\mathbf{i} + 6{,}890\,\mathbf{j} - 32{,}153\,\mathbf{k}$$

8. feladat



Határozzuk meg a megadott erőrendszer eredő vektorkettősét az origóra valamint a centrális egyenes egy pontját és az egyenes egységvektorát!

$|\mathbf{F}_1| = 400\ \ [\mathrm{N}]$ $\qquad |\mathbf{F}_2| = 300\ \ [\mathrm{N}]$

$|\mathbf{M}_1| = 200\ \ [\mathrm{Nm}]$ $\qquad |\mathbf{M}_2| = 600\ \ [\mathrm{Nm}]$

Eredő erő meghatározása:

$$\mathbf{F}_1 = 0\,\mathbf{i} + 400\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_2 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 300\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_0 = \sum \mathbf{F}_\mathrm{i} = 0\,\mathbf{i} + 400\,\mathbf{j} - 300\,\mathbf{k}$$

Origóra számított nyomaték:

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{M}_1 = 0\,\mathbf{i} - 200\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_2 = 600\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\sum \mathbf{M}_i = 600\,\mathbf{i} - 200\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_2 = 4\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 400 & 0 \end{vmatrix} = -2000\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 1200\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_0 = -1400\,\mathbf{i} + 1000\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}\ \ [\mathrm{kNm}]$$

A centrális egyenes egy pontját kijelölő vektor meghatározása:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_0 \mathrm{x} \mathbf{M}_0}{\mathbf{F}_0{}^2}$$

$$\mathbf{F}_0{}^2 = 400^2 + 300^2 = 250000$$

$$\mathbf{F}_0 \mathrm{x} \mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 400 & -300 \\ -1400 & 1000 & 0 \end{vmatrix} = 300000\,\mathbf{i} + 420000\,\mathbf{j} + 560000\,\mathbf{k}$$

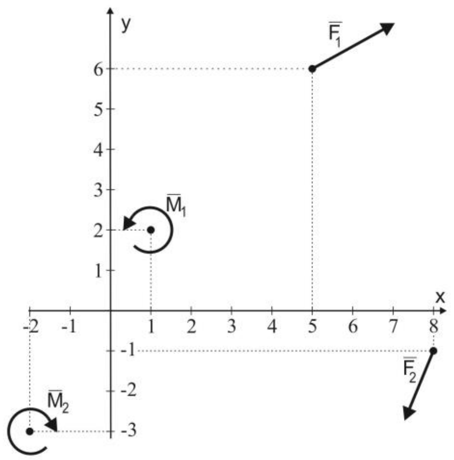
$$\mathbf{a} = \frac{30}{25}\,\mathbf{i} + \frac{42}{25}\,\mathbf{j} + \frac{56}{25}\,\mathbf{k} \cong 1{,}2\,\mathbf{i} + 1{,}68\,\mathbf{j} + 2{,}24\,\mathbf{k}$$

A centrális egyenes egységvektorának meghatározása:

A centrális egyenes párhozamos az F_0 vektorral.

$$\mathbf{e}_\mathrm{c} = \frac{\mathbf{F}_0}{|\mathbf{F}_0|} = \frac{0\,\mathbf{i} + 400\,\mathbf{j} - 300\,\mathbf{k}}{\sqrt{250000}} == 0\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} - \frac{3}{5}\mathbf{k}$$

9. feladat



Határozzuk meg a megadott erőrendszerhez tartozó centrális egyenes és a koordinátatengelyek metszéspontjait!

$\mathbf{F}_1 = \quad 200\,\mathbf{i} + 300\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ [N]

$\mathbf{F}_2 = -100\,\mathbf{i} - 400\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ [N]

$\mathbf{M}_1 = 400$ [Nm]

$\mathbf{M}_2 = 800$ [Nm]

Megoldás vektoros tárgyalásmóddal.

Az eredő vektorkettős erő komponense:

$$\mathbf{F}_0 = \sum \mathbf{F}_\mathrm{i} = 100\,\mathbf{i} - 100\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

Az eredő vektorkettős nyomatéki komponensének számítása:

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_\mathrm{i} \mathrm{x} \mathbf{F}_i$$

$\mathbf{M}_1 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 400\,\mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathbf{M}_2 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 800\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_1 = 5\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathbf{r}_2 = 8\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}_1 \mathrm{x} \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 6 & 0 \\ 200 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 300\,\mathbf{k}$$

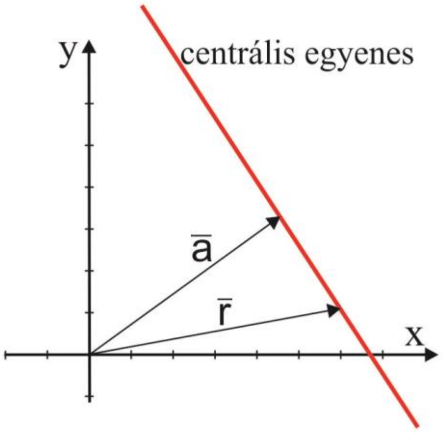
$$\mathbf{r}_2 \mathrm{x} \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & -3 & 0 \\ -100 & -400 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 3500\,\mathbf{k}$$

$\mathbf{M}_0 = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 3600\,\mathbf{k}$ [kNm]

A centrális egyenes egy pontját kijelölő vektor meghatározása:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_0 \mathrm{x} \mathbf{M}_0}{{\mathbf{F}_0}^2}$$

$${\mathbf{F}_0}^2 = 100^2 + 100^2 + 0^2 = 20000$$



$$\mathbf{F}_0 \mathrm{x} \mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 100 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -3600 \end{vmatrix} =$$

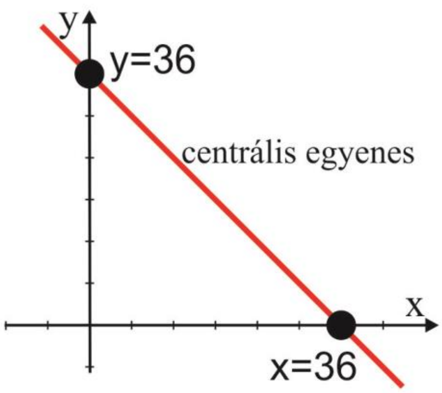
$$= 360000\,\mathbf{i} + 360000\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = 18\,\mathbf{i} + 18\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

A centrális egyenes paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{F}_0$$

$$\mathrm{x}\,\mathbf{i} + \mathrm{y}\,\mathbf{j} = \mathrm{a_x}\,\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\,\mathbf{j} + \mathrm{t} * 100\,\mathbf{i} - \mathrm{t} * 100\,\mathbf{j}$$



A vektoregyenletet átalakítjuk skalár egyenletrendszerré

$\mathrm{x} = \mathrm{a_x} + \mathrm{t} * 100$ $\qquad$ $\mathrm{y} = \mathrm{a_y} - \mathrm{t} * 100$

A tengelymetszeteket az alábbiak szerint kapjuk:

Adjuk össze a fenti két skalár egyenletet:

$\mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{a_x} + \mathrm{a_y}$ illetve $\mathrm{y} = -\mathrm{x} + \mathrm{a_x} + \mathrm{a_y}$

Ha $\mathrm{x} = 0$, akkor $\mathrm{y} = 36$ és ha $\mathrm{y} = 0$, akkor $\mathrm{x} = 36$.

Megoldás skalár tárgyalásmóddal.

A síkbeli feladatoknál, ahol az erők a síkban fekszenek, a kijelölt ponthoz tartozó nyomatékvektor biztosan merőleges a síkra. A koncentrált nyomatékok nyomatékvektorai is merőlegesek a síkra.

A számításoknál az erővektorokat felbontjuk a két koordináta tengely irányával párhuzamos összetevőkre. Ekkor a nyomatékok abszolút értékének számítása lényegesen egyszerűsödik.

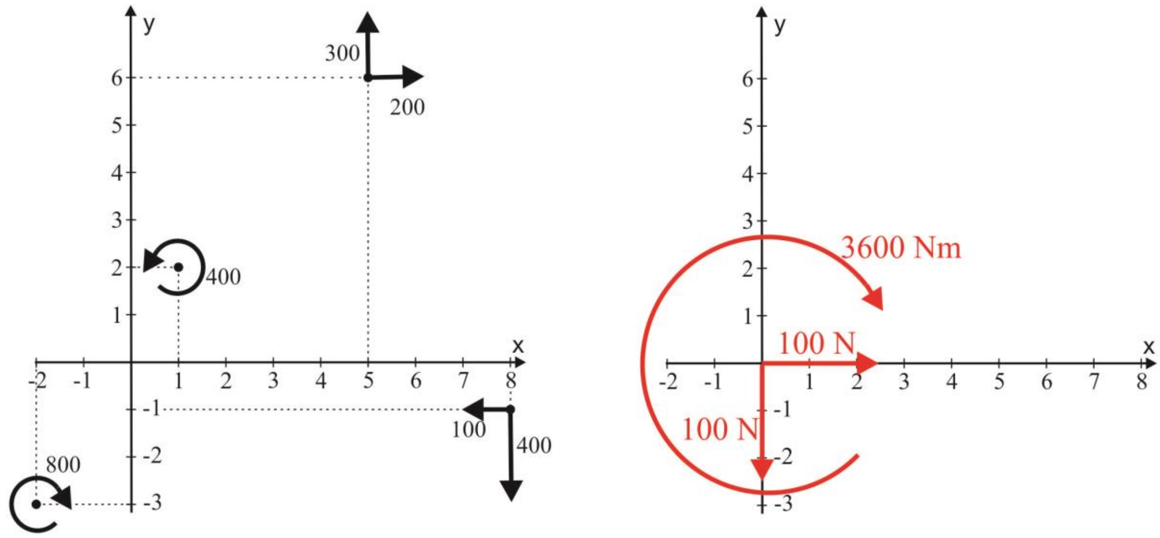
A lapra tekintve (szembe nézve a z tengely pozitív irányával) az óramutató járásával ellentétes nyomatékot tekintjük pozitívnak. Az ellenkező irányú forgatás a negatív.

A két koncentrált nyomaték egyike pozitívan 400 Nm, a másik negatívan

-800 Nm forgat a z tengely körül.

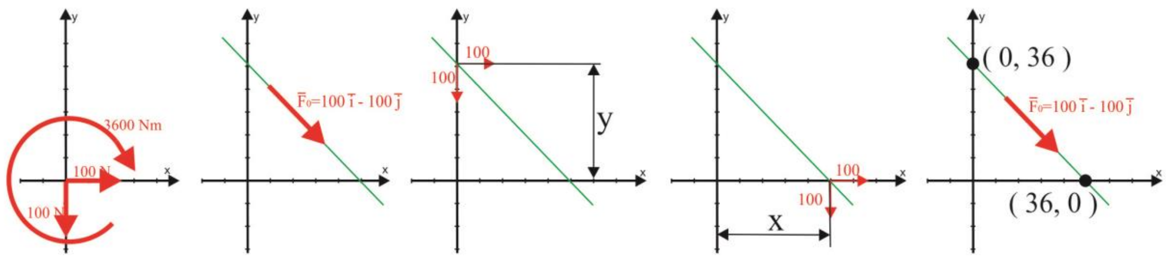
Az erőkomponensek közül a 300 N erő pozitívan forgat 5 m-es karon (+1500), a többi erő pedig negatívan $(-200*6-400*8-100*3=-4700)$.

Az eredő nyomaték $+1500+400-800-4700=-3600$ [Nm].



Az eredeti erőrendszer helyettesíthető (vele egyenértékű) az origóhoz kötött eredő vektorkettőssel.

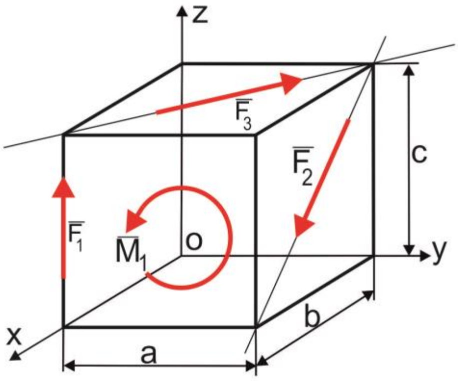
Síkbeli feladatoknál az eredő egy eltolt hatásvonalú erő lesz, melynek nyomatéka megegyezik az origóra számított nyomatékkal.



Technikailag a feladatot legegyszerűbb úgy megoldani, hogy az eredő erőt eltoljuk az y (x) tengelyhez és itt felbontjuk a koordináta tengelyekkel párhuzamos komponensekre. Ekkor a z tengely körül csak az egyik komponens forgat, hiszen a másik átmegy rajta.

Tehát $100*y=3600$, amelyből $y=36$ következik. Ugyan így járhatunk el a másik metszék számításánál is.

10. feladat



Határozzuk meg az origóhoz tartozó eredő vektorkettőst!

$$|\mathbf{F}_1| = F_1 = 100 \ \ [N]$$

$$|\mathbf{F}_2| = F_2 = 100\sqrt{10} \ \ [N]$$

$$|\mathbf{F}_3| = F_3 = 200\sqrt{13} \ \ [N]$$

$$|\mathbf{M}_1| = M_1 = 200 \ \ [Nm]$$

Az erők vektoros alakja:

$$\mathbf{F}_1 = 0\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 100\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = 100\sqrt{10}\,\frac{3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 1\,\mathbf{k}}{\sqrt{9+0+1}} = 300\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 100\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_3 = 200\sqrt{13}\,\frac{-3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}}{\sqrt{9+4+0}} = -600\,\mathbf{i} + 400\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

Az eredő vektorkettős erő komponense:

$$\mathbf{F}_0 = \sum \mathbf{F}_i = -300\,\mathbf{i} + 400\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

Az eredő vektorkettős nyomatéki komponensének számítása:

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_i + \sum \mathbf{r}_i x \mathbf{F}_i$$

$$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_1 = 200\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 = 3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_2 = 0\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_1 x \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 0\,\mathbf{i} - 300\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 x(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -300 & 400 & -100 \end{vmatrix} = -600\,\mathbf{i} - 300\,\mathbf{j} + 600\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_0 = -400\,\mathbf{i} - 600\,\mathbf{j} + 600\,\mathbf{k}$$