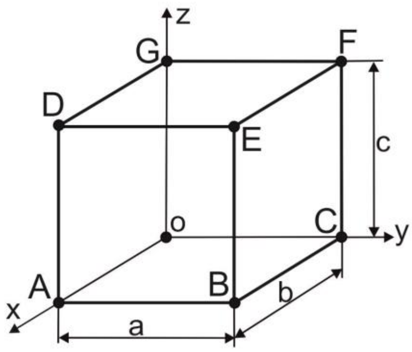
1. feladat



Írjuk föl a következő vektorokat!

AC, **BF**, **BG**, **DF**, **BD**, **AG**, **GB**

Írjuk föl ezen vektorok egységvektorát is!

a=3 m b= 4 m c= 5 m

Írjuk föl az egyes pontok koordinátáit:

O (0, 0, 0)	A (4, 0, 0)	B (4, 3, 0)	C (0, 3, 0)
D (4, 0, 5)	E (4, 3, 5)	F (0, 3, 5)	G (0, 0, 5)

Az egyes vektorok meghatározásakor abból induljunk ki, hogy a keresett vektor vektorrendezőit úgy kapjuk, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit. Ennek figyelembe vételével:

AC = -4 **i** + 3 **j** + 0 **k** **BF** = -4 **i** + 0 **j** + 5 **k** **BG** = -4 **i** - 3 **j** + 5 **k**

DF = -4 **i** + 3 **j** + 0 **k** **BD** = 0 **i** - 3 **j** + 5 **k** **AC** = -4 **i** + 0 **j** + 5 **k**

GB = 4 **i** + 3 **j** - 5 **k**

Egy vektor egységvektorát úgy kapjuk, hogy a vektort elosztjuk az abszolút értékével. Az egységvektor hossza (abszolút értéke) egységnyi.

$$\mathbf{e_{AC}} = \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}}{\sqrt{16+9+0}} = -\frac{4}{5}\,\mathbf{i} + \frac{3}{5}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e_{BF}} = \frac{-4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{16+0+25}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{41}}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{BG}} = \frac{-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{16+9+25}} = -\frac{4}{5\sqrt{2}}\,\mathbf{i} - \frac{3}{5\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \frac{5}{5\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$$

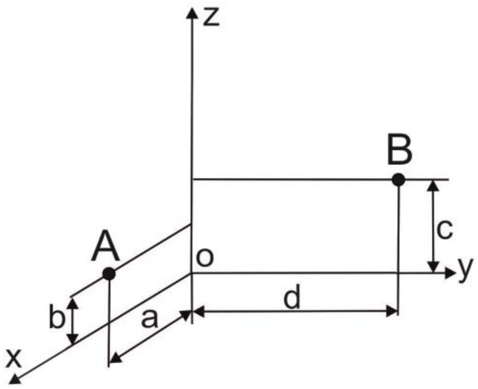
$$\mathbf{e_{DF}} = \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}}{\sqrt{16+9+0}} = -\frac{4}{5}\,\mathbf{i} + \frac{3}{5}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{BD}} = \frac{0\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{0+9+25}} = 0\,\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{34}}\,\mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{34}}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{AG}} = \frac{-4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{16 + 0 + 25}} = -\frac{4}{\sqrt{41}}\ \mathbf{i} + \ 0\ \mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{41}}\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{GB}} = \frac{4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}}{\sqrt{16 + 9 + 25}} = \frac{4}{5\sqrt{2}}\ \mathbf{i} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\ \mathbf{j} - \frac{5}{5\sqrt{2}}\ \mathbf{k}$$

2. feladat



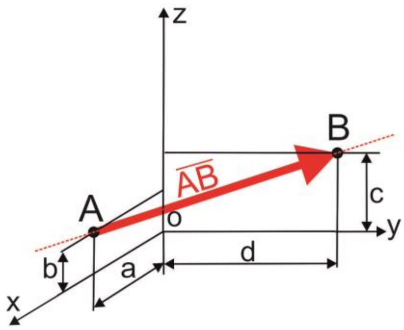
Írjuk fel az **AB** vektorral párhuzamos , 500 m hosszúságú (abszolútértékű) vektort!

a=3 m b=2 m c=4 m

d=8 m

Az A és B pont koordinátái:

A (3, 0, 2) B (0, 8, 4)



Első lépésben határozzuk meg az **AB** vektort:

$$\boldsymbol{AB} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Az **AB** vektor egységvektora:

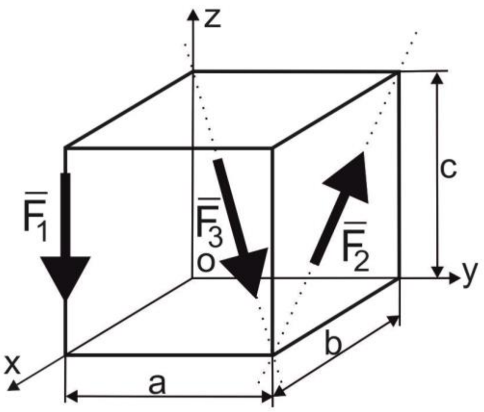
$$\boldsymbol{e}_{AB} = \frac{-3\mathbf{i}+8\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{9+64+4}} = -\frac{3}{\sqrt{77}}\,\mathbf{i} + \frac{8}{\sqrt{77}}\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{77}}\,\mathbf{k}$$

A párhuzamos vektorok:

$$\mathbf{v} = 500\mathbf{e}_{\mathbf{AB}} = -\frac{1500}{\sqrt{77}}\mathbf{i} + \frac{4000}{\sqrt{77}}\mathbf{j} + \frac{1000}{\sqrt{77}}$$

$$-\mathbf{v} = 500\mathbf{e}_{\mathbf{AB}} = +\frac{1500}{\sqrt{77}}\mathbf{i} - \frac{4000}{\sqrt{77}}\mathbf{j} - \frac{1000}{\sqrt{77}}\mathbf{k}$$

3. feladat



Adott a berajzolt $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3}$vektorok abszolút értéke.

a=1 m b=2 m c=3 m

F_1=100

F_2=$400\sqrt{13}$

F_2=$800\sqrt{14}$

Írjuk föl az $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3}$vektorokat!

Egy vektort úgy határozunk meg, hogy a vektor egységvektorát megszorozzuk az abszolút értékével.

$$\boldsymbol{F_1} = \mathrm{F}_1\boldsymbol{e_1} = 100(-\mathbf{k}) = 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} - 100\ \mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{F_2} = \mathrm{F}_2\boldsymbol{e_2} = 400\sqrt{13}\ \frac{-2\mathbf{i}+0\mathbf{j}+3\mathbf{k}}{\sqrt{9+4}} = -\ 800\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 1200\ \mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{F_3} = \mathrm{F}_3\boldsymbol{e_3} = 800\sqrt{14}\ \frac{2\mathbf{i}+1\mathbf{j}-3\mathbf{k}}{\sqrt{9+4+1}} = 1600\ \mathbf{i} + 800\ \mathbf{j} - 2400\ \mathbf{k}$$

4. feladat

Számítsa ki az alábbi determinánsokat!

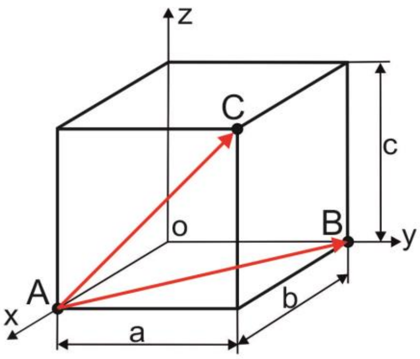
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +(2)[2*9-5*8]-(3)[0*9+5*6]+(4)[0*8-2*6]$$
$$= -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = +(7)[(-2)*(-6)-5*3] = -21$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -(\mathbf{j})[(-1)*(-8)-4*7] = -20\mathbf{j}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = +(\mathbf{i})[15-0]-(\mathbf{j})[20-0]+(\mathbf{k})[-24-0] =$$
$$= 15\,\mathbf{i} - 20\,\mathbf{j} - 24\,\mathbf{k}$$

5. feladat



Számítsa ki az **AB** x **AC** vektori- és az

AB * **AC** skalárszorzatot!

Az egyes vektorok:

AB = -5 **i** + 4 **j** + 0 **k**

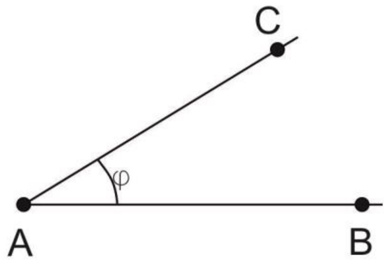
AC = 0 **i** + 4 **j** + 3 **k**

$$\mathbf{AB}\ \mathrm{x}\ \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = +(\mathbf{i})[12-0] - (\mathbf{j})[-15-0] + (\mathbf{k})[-20-0]$$

$$\mathbf{AB}\ \mathrm{x}\ \mathbf{AC} = 12\,\mathbf{i} + 15\,\mathbf{j} - 20\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{AB} * \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 16$$

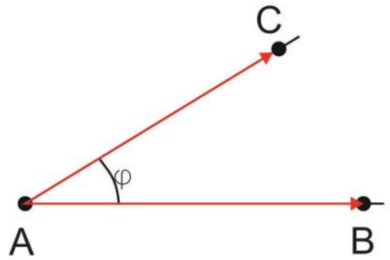
6. feladat



Adott a térben három pont a koordinátáival:

A(3, 0, 0) B(0, 2, 0) C(0, 2, 5)

Számítsuk ki, a két egyenes hajlásszögét!



Definíció szerint az **AB** ***AC** skalár szorzat:

AB***AC**= |**AB**| *|**AC**|*cosφ

illetve

cosφ= $\frac{\mathbf{AB}*\mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}|*|\mathbf{AC}|}$

AB=-3 **i**+2 **j** + 0 **k**   **AC**=-3 **i**+2 **j** + 5 **k**

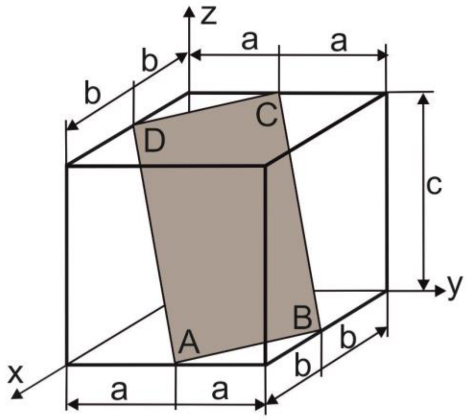
|**AB**|=$\sqrt{9+4+0} = \sqrt{13}$ |**AB**|=$\sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$

AB***AC**= $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$=9+4+0=13

cosφ= $\frac{\mathbf{13}}{\sqrt{13}*\sqrt{38}}$=0,5849

φ= $54{,}2^0$

7. feladat



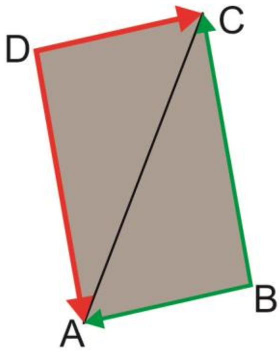
Számítsuk ki a jelölt síkidom területét!

a = 2 m b = 3 m

A jelölt síkidom sarokpontjainak koordinátái:

A(6, 2, 0) B(3, 4, 0) C(0, 2, 4) D(3, 0, 4)

Bontsuk fel a négyszöget két háromszögre.



A keresett területet:

$$T = |\mathbf{DA}\text{x}\mathbf{DC}| = |\mathbf{BA}\text{x}\mathbf{BC}|$$

DA= 3 **i** + 2 **j** -4 **k** **BA**= 3 **i** - 2 **j** +0 **k**

DC=- 3 **i** + 2 **j** -4 **k** **BC**= -3 **i** - 2 **j** +4 **k**

$$\mathbf{DA}\text{x}\mathbf{DC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$$

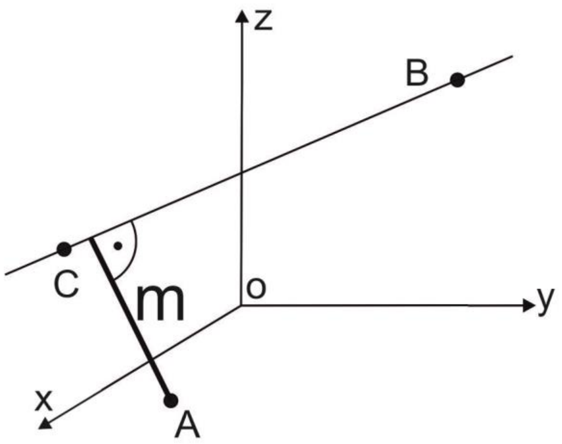
$$|\mathbf{DA}\text{x}\mathbf{DC}| = \sqrt{64 + 144 + 144} = \sqrt{352}$$

$$\mathbf{BA}\text{x}\mathbf{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -8\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} - 12\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{BA}\text{x}\mathbf{BC}| = \sqrt{64 + 144 + 144} = \sqrt{352}$$

$$T = \sqrt{352} \cong 18{,}76\ m^2$$

8. feladat



Számítsuk ki az A pont és a CB egyenes távolságát!

A(5, 2, 0) B(1, 8, 6) C(3, -4, 4)

Az ABC háromszög területe kétféleképpen is számítható és a számítások eredménye egyenlő egymással.

$$T = \frac{|\mathbf{AC}\mathrm{x}\mathbf{AB}|}{2} = \frac{|\mathbf{CB}| * m}{2}$$

amiből

$$m = \frac{|\mathbf{AC}\mathrm{x}\mathbf{AB}|}{|\mathbf{CB}|}$$

AC= -2 **i** - 6 **j** +4 **k** **AB**= -4 **i** +6 **j** +6 **k**

CB= - 2 **i** + 12 **j** +2 **k** $|\mathbf{CB}| = \sqrt{4+144+4} = \sqrt{152}$

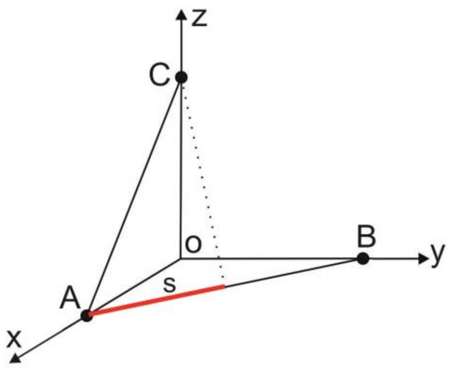
$$\mathbf{AC}\mathrm{x}\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -60\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} - 36\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{AC}\mathrm{x}\mathbf{AB}| = \sqrt{3600+16+1296} = \sqrt{4912}$$

$$\mathbf{BA}\mathrm{x}\mathbf{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -8\,\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} - 12\,\mathbf{k}$$

$$m = \frac{\sqrt{4912}}{\sqrt{152}} \cong 5{,}69\ m$$

9.feladat



Számítsuk ki az AC szakasz merőleges vetületét az AB egyenesre!

A koordináták m egységben vannak megadva.

A(5, 0, 0)   B(0, 8, 0)   C(0, 0, 9)

$s = \mathbf{AC} * \mathbf{e}_{AB} = \mathbf{AC}\,\frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = \frac{\mathbf{AC} * \mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|}$

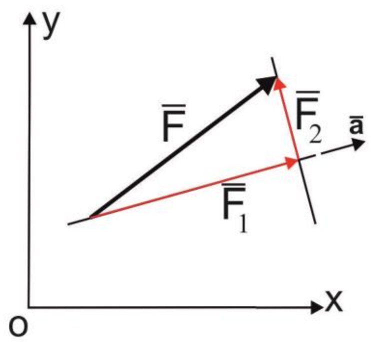
AC = -5 **i** +0 **j** + 9 **k**

AB = -5 **i** +8 **j** + 0 **k** $|\mathbf{AB}| = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$

$\mathbf{AC} * \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 25$

$s = \frac{25}{\sqrt{89}} \cong 2{,}65\ m$

10. feladat



Bontsuk fel az adott **F** vektort egy **a** vektor irányú és egy **a** vektorra merőleges komponensre!

$\mathbf{F} = 8\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a} = 2\,\mathbf{i} - 1\,\mathbf{j}$

A felbontás azt jelenti, hogy a komponens vektorok összege kiadja az eredeti vektort:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$$

Határozzuk meg az **a** vektor egységvektorát:

$$\mathbf{e}_\mathrm{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2\,\mathbf{i} - 1\,\mathbf{j}}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}$$

Az $\mathbf{F}_1$vektort a skaláris szorzás segítségével írhatjuk fel:

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}\mathbf{e}_\mathbf{a})\mathbf{e}_\mathbf{a}$$

$$\mathrm{F}_1 = (\mathbf{F}\mathbf{e}_\mathbf{a}) = [8 \quad 4 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}\mathbf{e}_\mathbf{a})\mathbf{e}_\mathbf{a} = \frac{12}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}\right) = \frac{24}{5}\,\mathbf{i} - \frac{12}{5}\,\mathbf{j}$$

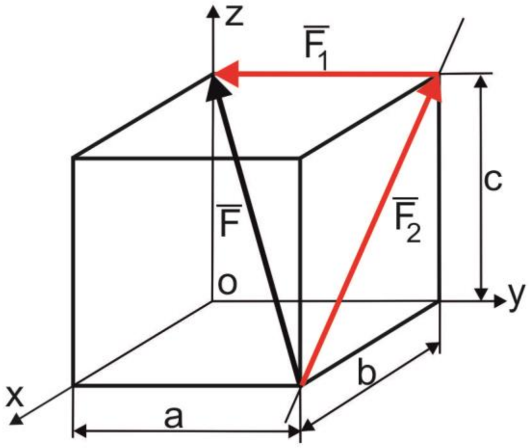
Az $\mathbf{F}_2$ vektor két vektor különbségeként számítható:

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1 = \left(8 - \frac{21}{5}\right)\mathbf{i} + \left(4 + \frac{12}{5}\right)\mathbf{j} = \frac{16}{5}\,\mathbf{i} + \frac{32}{5}\,\mathbf{j}$$

Ha az $\mathbf{F}_1$*és* $\mathbf{F}_2$vektorok az előírásnak megfelelően merőlegesek egymásra, akkor skalárszorzatuk zérus kell legyen:

$$\mathbf{F}_1 * \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & \frac{-12}{5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{32}{5} \end{bmatrix} = 0.$$

11. feladat



Bontsuk fel az adott **F** vektort egy **a** vektor irányú és egy **a** vektorra merőleges komponensre!

$F = \sqrt{50}$ **a** = -4 **i** + 0 **j** + 3 **k**

A felbontás azt jelenti, hogy a komponens vektorok összege kiadja az eredeti vektort:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$$

Határozzuk meg az **a** vektor egységvektorát valamint az **F** vektort:

$$\mathbf{e}_\mathrm{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-4\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}}{\sqrt{16+0+9}} = -\frac{4}{5}\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + \frac{3}{5}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = \sqrt{50}\,\frac{-4\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}}{\sqrt{16+25+9}} = -4\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

Az $\mathbf{F}_1$vektort a skaláris szorzás segítségével írhatjuk fel:

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}\mathbf{e_a})\mathbf{e_a}$$

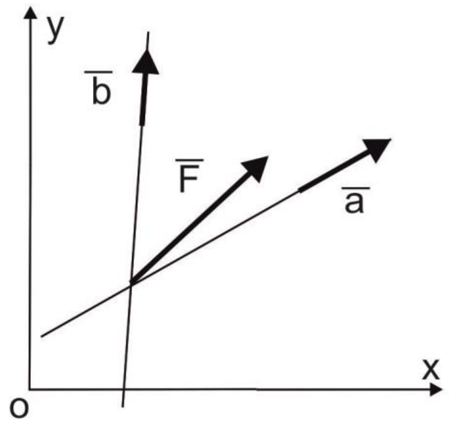
$$\mathrm{F}_1 = (\mathbf{F}\mathbf{e_a}) = [-4 \quad -5 \quad 3]\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = 5$$

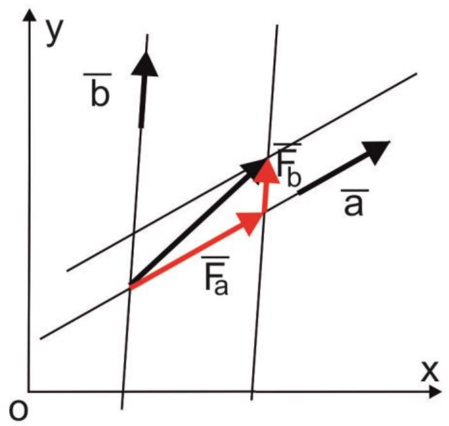
$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}\mathbf{e_a})\mathbf{e_a} = 5\left(-\frac{4}{5}\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + \frac{3}{5}\,\mathbf{k}\right) = -4\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

Az $\mathbf{F}_2$ vektor két vektor különbségeként számítható:

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1 = (-4\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) - (-4\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) = 0\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

12. feladat





Bontsuk fel az adott **F** vektort **a** és **b** vektorokkal párhuzamos komponensekre!

F= 12 **i** + 9 **j**

a= 2 **i** -1 **j** **b**= 1 **i** + 2 **j**

A felbontást az alábbi egyenlettel tudjuk leírni:

$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b = \mathbf{F}$

$\lambda_1\ \mathbf{a} + \lambda_2\ \mathbf{b} = \mathbf{F}$

$\lambda_1(2\ \mathbf{i} - 1\ \mathbf{j}) + \lambda_2(1\ \mathbf{i} + 2\ \mathbf{j}) = 12\ \mathbf{i} + 9\ \mathbf{j}$

Válogassuk szét az bal oldalt és jobb oldalt az egységvektorok szerint:

$\mathbf{i}\ (2\lambda_1 + \lambda_2) = 12\ \mathbf{i}$

$\mathbf{j}\ (-\lambda_1 + 2\lambda_2) = 9\ \mathbf{j}$

A vektor egyenletek az alábbi skalár egyenletekre vezethetők vissza:

$(2\lambda_1 + \lambda_2) = 12$ $(-\lambda_1 + 2\lambda_2) = 9$

Az egyenletek megoldásai:

$\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 6$

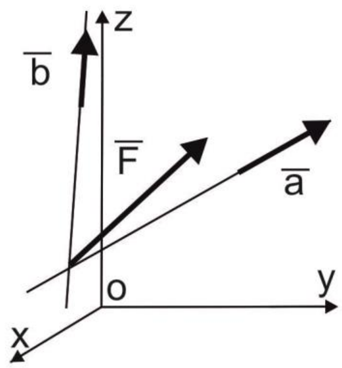
Ezek segítségével felírhatók a keresett vektorok:

$$\mathbf{F}_a = 3\ (2\ \mathbf{i} - 1\ \mathbf{j}) = 6\ \mathbf{i} - 3\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_b = 6\ (1\ \mathbf{i} + 2\ \mathbf{j}) = 6\ \mathbf{i} + 12\ \mathbf{j}$$

Ezen vektorok összege valóban kiadja az eredeti **F** vektort.

13. feladat



Bontsuk fel az adott F vektort az a és b vektorokkal párhozamos összetevőkre!

a = 2 **i** + 2 **j** – 3 **k** **b** = 1 **i** – 1 **j** +4 **k**

F = 7 **i** + 1 **j** +6 **k**

A felbontást csak akkor tudjuk végrehajtani, ha a három vektor egy síkban helyezkedik el. Ennek legegyszerűbb vizsgálata a három vektor vegyes szorzatának elvégzésével lehetséges. Ha egy síkban vannak, akkor a vegyes szorzat zérus értékű. A vegyes szorzat a három vektor által kifeszített test térfogatával arányos.

$$\mathrm{V} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Ez azt jelenti, hogy egy síkban vannak, tehát a felbontás végrehajtható.

A felbontást leíró vektor egyenletek:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$$

$$7\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k} = \lambda_1(2\,\mathbf{i} + 2\,\mathrm{j} - 3\,\mathbf{k}) + \lambda_2(1\,\mathbf{i} - 1\,\mathrm{j} + 4\,\mathbf{k}).$$

A vektor egyenletekből kapott skalár egyenletek:

$7 = 2\lambda_1 + \lambda_2$ $1 = 2\lambda_1 - \lambda_2$ $6 = -3\lambda_1 + 4\lambda_2$

Az egyenletek megoldásai:

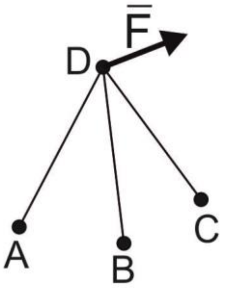
$\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$

A keresett vektorok:

$$\mathbf{F}_a = 4\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_b = 3\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$$

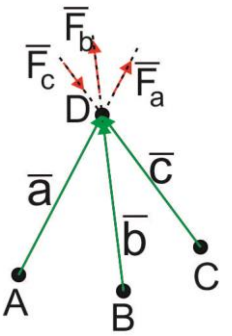
14. feladat



Bontsuk fel az F vektort **AD**, **BD**, **CD** irányú komponensekre!

A (5, 0, 0) B (6, 6, 0) C (-4, 2, 0)

D (3, 3, 8) **F**= 500 **i** + 400 **j** + 600 **k**



Határozzuk meg az **a**, **b**, **c** vektorokat:

$\mathbf{a} = \ -2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k} \quad \mathbf{b} = \ -3\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k}$

$\mathbf{c} = \ 7\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k}$

Az **F** vektor felbontását leíró vektoregyenlet:

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c}$

Koordinátás alakban felírva az előbbi egyenlet:

$$500\,\mathbf{i} + 400\,\mathbf{j} + 600\,\mathbf{k} = \lambda_1(-2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k}) + \lambda_2(-3\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k}) +$$

$$+\,\lambda_3(7\,\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k})$$

A fenti vektoregyenletet átírhatjuk skalár egyenletekkel

$500 = \ -2\,\lambda_1 - 3\,\lambda_2 + 7\,\lambda_3$

$400 = \ 3\,\lambda_1 - 3\,\lambda_2 + \lambda_3$

$600 = \ 8\,\lambda_1 + 8\,\lambda_2 + 8\,\lambda_3$

A fenti három ismeretlenes egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\lambda_1 = \frac{26800}{448} =\cong 59{,}8$$

$$\lambda_2 = \frac{-23000}{448} =\cong -52{,}3$$

$$\lambda_3 = \frac{28800}{448} =\cong 66{,}5$$

A vektoregyenlet megoldásának másik útja:

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{Fbc}}{\mathbf{abc}} \qquad \lambda_2 = \frac{\mathbf{aFc}}{\mathbf{abc}} \qquad \lambda_3 = \frac{\mathbf{abF}}{\mathbf{abc}}$$

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -2 & +3 & +8 \\ -3 & -3 & +8 \\ +7 & +1 & +8 \end{vmatrix} = 448$$

$$\mathbf{Fbc} = \begin{vmatrix} 500 & 400 & 600 \\ -3 & -3 & +8 \\ +7 & +1 & +8 \end{vmatrix} = 26800$$

$$\mathbf{aFc} = \begin{vmatrix} -2 & +3 & +8 \\ 500 & 400 & 600 \\ +7 & +1 & +8 \end{vmatrix} = -23000$$

$$\mathbf{abF} = \begin{vmatrix} -2 & +3 & +8 \\ -3 & -3 & +8 \\ 500 & 400 & 600 \end{vmatrix} = 29800$$

A fönt kijelölt hányadosok rendre megegyeznek az előzőekben kiszámolt értékekkel.

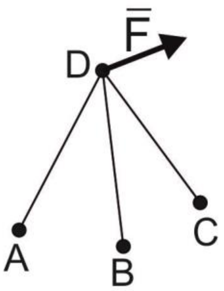
A keresett vektorok:

$$\mathbf{F}_a = \frac{26800}{448}(-2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_b = \frac{-23000}{448}(-3\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_c = \frac{29800}{448}(7\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k})$$

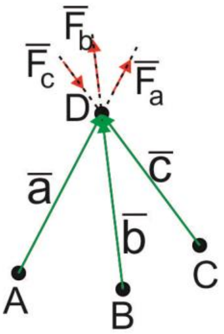
15. feladat



Bontsuk fel az F vektort **AD**, **BD**, **CD** irányú komponensekre!

A (5, 0, 0)   B (0, 0, 0)   C (0, 8, 0)

D (3, 4, 9)   **F**= 100 **i** + 200 **j** +3 **k**



Határozzuk meg az **a**, **b**, **c** vektorokat:

$\mathbf{a} = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k} \quad \mathbf{b} = 3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}$

$\mathbf{c} = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}$

Az **F** vektor felbontását leíró vektoregyenlet:

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}$

A vektoregyenlet megoldásának egyik lehetséges módja:

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{Fbc}}{\mathbf{abc}} \qquad \lambda_2 = \frac{\mathbf{aFc}}{\mathbf{abc}} \qquad \lambda_3 = \frac{\mathbf{abF}}{\mathbf{abc}}$$

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -2 & +4 & +9 \\ +3 & +4 & +9 \\ +3 & -4 & +9 \end{vmatrix} = -360$$

$$\mathbf{Fbc} = \begin{vmatrix} 100 & 200 & 300 \\ +3 & +4 & +9 \\ +3 & -4 & +9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{aFc} = \begin{vmatrix} -2 & +4 & +9 \\ 100 & 200 & 300 \\ +3 & -4 & +9 \end{vmatrix} = -15000$$

$$\mathbf{abF} = \begin{vmatrix} -2 & +4 & +9 \\ +3 & +4 & +9 \\ 100 & 200 & 3600 \end{vmatrix} = 3000$$

$$\lambda_1 = \frac{0}{-360} = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{-15000}{-360} = \frac{1500}{36} \qquad \lambda_3 = \frac{3000}{-360} = -\frac{300}{36}$$

A fönt kijelölt hányadosok rendre megegyeznek az előzőekben kiszámolt értékekkel.

A keresett vektorok:

$$\mathbf{F}_a = 0\,(-2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}) = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_b = \frac{1500}{36}(+3\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_c = -\frac{300}{36}(3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k})$$